A NEM VÁRT RITMUS

Néda Zoltán[1], Káptalan Erna[2]
[1]Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Elméleti és Számítógépes Fizika Tanszék,
zneda@phys.ubbcluj.ro
[2]Báthory István Elméleti Líceum, Fizika Katedra, kaptalane@yahoo.com

A SZINKRONIZÁCIÓ, MINT KOLLEKTÍV JELENSÉG

Számtalan természeti és társadalmi jelenség során meggyőződhetünk arról, hogy nagyszámú egyed közös (kollektív) viselkedése minőségileg új és érdekes jelenségeket eredményez. Ezen jelenségek általában nem nyilvánvaló következményei a rendszert alkotó egyedek tulajdonságainak. A rendszer egészét jellemző nemtriviális viselkedést kollektív jelenségnek nevezzük, utalva arra, hogy a furcsa viselkedés a rendszert alkotó egyedek közti kölcsönhatásból, illetve az egyedek nagy számából adódik. A fentiek alapján könnyű megsejteni, hogy a kollektív viselkedések egy nagyon tág jelenségcsoportot képviselnek, és a fizika klasszikus modelljei és módszerei hasznosnak bizonyulnak ezen jelenségek leírására is. Egymással kölcsönható ingaórák vagy oszcilláló áramkörök szinkronizációja talán a legismertebb kollektív viselkedés.

A következőkben oszcillátornak fogunk nevezni minden olyan rendszert, amelynek periodikus dinamikája van. Nem csak fizikai, hanem biológiai rendszerek is lehetnek oszcillátorok. Az oszcillátorok szinkronizációja a legtöbb fizikusnak azt jelenti, hogy a rendszert alkotó egyedek fázisai azonosak és időben azonosak is maradnak. Ezen dinamikus állapot azonban a szinkronizációnak csak az egyik lehetséges formája. Bizonyos esetekben, például, ha az oszcillátorok közti fáziskülönbség marad időben állandó, a rendszert –jogosan- szintén szinkronizáltnak tekinthetjük. A feladat lehet ennél sokkal bonyolultabb, ugyanis nagyon sok oszcillátor esetén nincs egy jól értelmezett fázis, hiszen oszcillátornak lehet tekinteni bármely komplex periodikus (ciklikus) folyamatot. Másfelől a fentebb értelmezett tökéletesen szinkronizált állapotokon kívül létezhetnek részlegesen (parciálisan) szinkronizált állapotok is, ahol az oszcillátorok fázisai nagyrészt vagy csak megközelítően azonosak. Egy oszcillátor-sokaság szinkronizációjának a jellemzésére egy q rendparamétert vezetünk be, ami általában egy 0 és 1 közötti szám. A rendparaméter a szinkronizáció fokát jellemzi, $q = 1$ a tökéletesen szinkronizált állapotnak felel meg, $q = 0$ bármely fajta szinkronizáció hiányát jellemzi és a $0 < q < 1$ esetben részleges szinkronizáció van. A rendparaméter megválasztása nem mindig egyértelmű és nagymértékben függ az oszcillátor-sokaság tulajdonságaitól.

Ebben a dolgozatban azon eseteket tárgyaljuk, amikor a sokaságot alkotó oszcillátorok rendszerében nincs egy "karmester" aki egy közös ritmust diktálna. Ilyen esetekben **spontán** szinkronizációról beszélünk. A spontán szinkronizáció nagyon gyakori jelenség. Számos természeti és szociális rendszerben megfigyelhető: mechanikailag kapcsolt ingák és metronómok, kapcsolt elektronikus rezgőkörök, tűzlegyek periodikus felvillanásai dél-kelet Ázsiában, tücskök ciripelése, békák brekegése, együtt élő nők menstruációs ciklusainak egybeesése, vastaps, kémiai reakciókban levő oszcillációk és egymástól távoli viharmagokban a villámlási aktivitás esetén, stb [1].

Tökéletesen azonos, egymással globálisan kölcsönható (mindenki mindenkivel) oszcillátorok spontán szinkronizációja triviális, ha az oszcillátorok közti kölcsönhatás fáziskülönbség-csökkentő jellegű. Azonnal belátható azonban, hogy a fent leírt rendszer a valóságban nem létezik, ugyanis tökéletesen egyforma egyedek nem léteznek. Jogos tehát a kérdés, hogy különböző frekvenciájú oszcillátorok szinkronizálódhatnak-e? Ha igen, akkor mi ennek a feltétele, és mi lesz a közös frekvencia, amit minden egyed felvesz? A spontán szinkronizációnak egy erősen nemtriviális és érdekes megjelenési lehetősége az is, amikor különböző sajátfrekvenciájú oszcillátorok szinkronizálódnak anélkül, hogy egy direkt fáziskülönbség-csökkentő kölcsönhatás lenne az egyedek között. Ezen rendszerekben a szinkronizáció egy optimiziácónak a melléktermékeként jelenik meg és ezen rendszerek lesznek majd különösen érdekesek számunkra.

FÁZIS- ÉS PULZUSCSATOLT OSZCILLÁTOROK SPONTÁN SZINKRONIZÁCIÓJA.

Kísérletileg megállapított tény, hogy nagyon sok ingaóra vagy metronóm szinkronizálódhat, annak ellenére, hogy sajátfrekvenciájuk különböző. Ennek a feltétele azonban az, hogy a köztük levő kölcsönhatás elég erős legyen. Egy sok oszcillátort tartalmazó rendszerre létezik egy kritikus kölcsönhatás-erősség, ami alatt a rendszer nem szinkronizálódik, azonban ha az egyedek közti kölcsönhatás erőssége meghaladja ezt a kritikus értéket, akkor megjelenik a szinkronizáció. Minél eltérőbbek az oszcillátorok, annál nagyobb a kritikus kapcsolás értéke. Ezt az érdekes fázisátalakulás-szerű jelenséget írja le a Kuramoto modell [2].

A Kuramoto modell fáziskapcsolt rotátorok sokaságát tekinti. Tekintsünk N darab globálisan csatolt rotátort. A rotátorok ω_k körfrekvenciával rendelkeznek és állapotukat a ϕ_k fázisuk jellemzi. Kuramoto és Nishikava, Winfree [3] ötletét követve a rendszer időbeli evolúcióját egy kapcsolt elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel közelítette meg. Modellükben az i-edik oszcillátor mozgásegyenlete:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\phi_j - \phi_k), \tag{1}$$

ahol K az oszcillátorok közti csatolás erősségét jellemző állandó. Az (1) differenciálegyenlet jobboldalának az első tagja egy szabad (a többi oszcillátorral nem kapcsolt) oszcillátor fázisának a sajátfrekvencia szerinti konstans sebességű változását írja le, a második tag pedig a rendszerben levő többi oszcillátorral való kölcsönhatást modellezi. Az (1) szerint minden oszcillátor kölcsönhat minden más oszcillátorral egy fáziskülönbség csökkentő kölcsönhatással: ha $\phi_j > \phi_k$, a k-adik oszcillátor fázisa gyorsabban nő, ha meg $\phi_j < \phi_k$, akkor lassabban. Kuramoto és Nishikava nagy érdeme, hogy rájöttek arra, hogy ha a az egyedek közti kölcsönhatást harmonikus formában választják meg, a kapcsolt differenciálegyenlet-rendszer szétválasztható egymástól független egyenletekké, és a szinkronizáltság fokát jellemző q rendparaméter átlagos értékére analitikus eredmények kaphatók. Rendparaméternek a:

$$q = \left\langle \left| \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\phi_j} \right| \right\rangle_t \tag{2}$$

0 és 1 közti mennyiséget tekinthetjük. A (2)-es képletben a szögletes zárójel idő szerinti átlagolást jelent. Nyilvánvalóan, ha a fázisok véletlenszerűen mutatnak minden lehetséges irányba, a rendszer nem szinkronizált és $q = 0$, ha azonban a rendszer tökéletesen szinkronizált, a fáziskörön minden fazor egy irányba mutat, és ezáltal $q = 1$. A Kuramoto

modell egzakt megoldása a termodinamikai határesetre vonatkozik ($N \to \infty$), és azt az érdekes eredményt adja, hogy egy adott oszcillátorsokaság esetén létezik egy kritikus K_c csatoláserősség. Ha $K \leq K_c$, a rendszer nem szinkronizálódik és a stabil megoldás: $q = 0$; ha $K > K_c$ a rendszerben részleges szinkronizáció jelenik meg, és a stabil megoldás: $0 < q < 1$. A K_c kritikus csatoláserősség az oszcillátorok sajátfrekvenciáinak a szórásától függ: minél különbözőbbek ezen sajátfrekvenciák (minél nagyobb a szórás értéke) annál nagyobb lesz K_c értéke. A rendszerben egy érdekes fázisátalakulás-szerű jelenség tapasztalható, ezen fázisátalakulás sok szempontból hasonló a ferromágneses rendszerekben levő ferro-paramágneses fázisátalakuláshoz. A Kuramoto modell magyarázatot ad tehát arra, hogy egy valós oszcillátor- sokaságban, ahol az oszcillátorok sajátfrekvenciái különbözőek, miért és mikor jelenhet meg bizonyos fokú szinkronizáció.

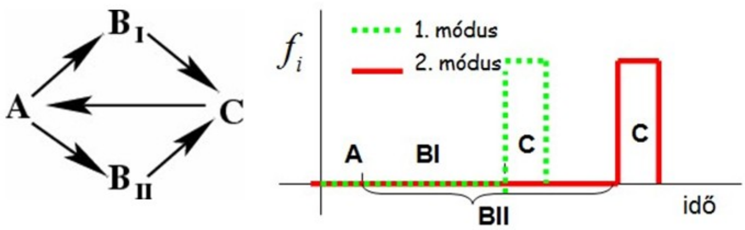
Nagyon sok természetbeli oszcillátor esetén a fázis nem jól értelmezett mennyiség, és így az oszcillátorok kölcsönhatását nem a fázisok különbsége vezérli. Tekintsük például az ázsiai tűzlegyek esetét: egy tűzlégy fázisa nem értelmezhető, és a tűzlegyek egymásról csak a felvillanás (pulzus-kibocsátás) pillanatában szereznek információt. Feltehetően tehát az egyedek közti kölcsönhatás is csak a felvillanás időpontjában hat. A természetbeli oszcillátoroknak nagy többsége tüzelő jellegű (pl. a neuronok), és a kölcsönhatásuk ezen tüzelések által valósul meg. Ezen pulzuscsatolt oszcillátor-rendszerre is létezik egy egyszerű modell, amely elegánsan magyarázza a különböző sajátfrekvenciájú oszcillátorok szinkronizálásának a lehetőségét [4]. A modell lényege az, hogy egy oszcillátor tüzelése a többi oszcillátor fázisát egy δ értékkel megnöveli. Ezáltal egyetlen egy tüzelés lavinaszerű folyamatot eredményezhet, amelyben nagyon sok más oszcillátor tüzelni fog. A rendszerben bizonyos fokú szinkronizáció léphet fel, amelyben az oszcillátorok együtt tüzelnek. A szinkronizáció fokára egy jól értelmezett rendparaméter a legnagyobb tüzelési lavina relatív mérete (a legnagyobb lavinában tüzelő oszcillátorok száma elosztva a rendszerben levő oszcillátorok számával). A kölcsönhatás erősségét a δ paraméter jellemzi. A fent leírt pulzuscsatolt rendszer úgy viselkedik, mint a Kuramoto modell. Létezik egy δ_c krítikus csatolás, amely alatt a rendszer nem szinkronizálódik, és amely felett részleges szinkronizáció alakul ki. A kritikus csatolás értéke az oszcillátorok ϕ_i^c periódusainak a szórásától függ. Minél különbözőbb frekvenciájúak az oszcillátorok, annál nagyobb δ_c értéke.

TÖBBMÓDUSÚ PULZUSCSATOLT OSZCILLÁTOROK MEGLEPŐ SZINKRONIZÁCIÓJA

Tekintsünk most olyan tüzelő jellegű oszcillátorokat, amelyek több módusban is működhetnek [5,6]. Vizsgáljuk először azt az egyszerű esetet, mikor ezen módusok a pulzuskibocsátás periódusában különböznek egymástól. Legyenek ugyanakkor az oszcillátorok valószerűbbek azáltal, hogy az oszcilláció periódusa is ingadozhat (fluktuálhat). Egy egyszerű absztrakt modell ezen oszcillátorokra a következő lehet. Egy oszcillátor periódusa három egymást követő, ciklusból áll: $A \to B \to C \to A \to ...$ A periódus első ciklusát (részét) jelöljük *A*-val, és legyen ez a dinamikának a véletlenszerű (sztochasztikus) része, melyből a periódusingadozás származik. Ezen *A* rész tekinthető úgy is, mind egy sztochasztikus reakcióidő. Jelöljük az *A* ciklus időhosszát τ_A -val, ami egy sztochasztikus (véletlenszerű) változó lesz. A dinamika *B* ciklusa legyen a periódus leghosszabb időtartama: τ_B és legyen ez az az időhossz, amit az oszcillátor periódusként követni szeretne. Az oszcillátor módusai abból származnak, hogy τ_B hossza különböző lehet. A legegyszerűbb eset az, amikor a *B* ciklus hossza csak kétféle lehet: τ_{BI} vagy τ_{BII}. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy $\tau_{BII} = 2 \cdot \tau_{BI}$, vagyis létezik egy lassúbb módus, ($B = B_{II}$), és egy gyorsabb módus, ($B = B_I$). Amikor az oszcillátor dinamikája a *B* részéhez ér, az oszcillátor dönthet, hogy melyik módust választja. A periódus utolsó, *C*, ciklusában történik a tüzelés. A tüzelés hossza legyen τ_c, erőssége meg $1/N$, ahol *N* a rendszerben levő oszcillátorok száma. Az i-edik oszcillátor pulzuskibocsátása tehát $f_i = 1/N$, ha az oszcillátor a *C* ciklusban van, és $f_i = 0$, ha az oszcillátor az *A* vagy *B* ciklusban van. A rendszerben levő összes pulzuserősség $f = \sum_{i=1}^{N} f_i$.

A fentebb értelmezett absztrakt oszcillátorok nagyon általánosak, és a természetben sok olyan rendszer található, aminek a dinamikája hasonló. Egy azonnali példa erre az emberi tapsolás [7].

Az eddig értelmezett többmódusú sztochasztikus és tüzelő oszcillátorok dinamikája egyszerű, de még nem értelmeztük a köztük levő kapcsolást. Tételezzük fel, hogy ezen többmódusú oszcillátor-sokaság célja az, hogy az *f* pillanatnyi összpulzus erősségét a rendszerben egy megszabott f^* érték körül tartsa. A rendszer tehát egyszerűen arra törekszik, hogy a tüzeléseket úgy optimizálja, hogy: $f \approx f^*$. Az egyedek egyetlen szabadsági foka az, hogy a módusok között szabadon választhatnak. Egy egyed, miután befejezte az *A* ciklust, választhat, hogy a B_I vagy a B_{II} módust követi (1. ábra). Ha ebben az időpillanatban $f < f^*$, az oszcillátor a rövidebb periódusú, B_I módust követi, növelve ezáltal az egységnyi idő alatti pulzusok számát és ezáltal *f* értékét. Ha azonban $f > f^*$, az oszcillátor a hosszabb periódusú, B_{II} módust választja, csökkentve az egységnyi idő alatti pulzusok számát és ezáltal *f* értékét. A fenti dinamikának tehát egy optimizációs célja van: a rendszerben levő összpulzus erősségét f^* környezetében tartani.



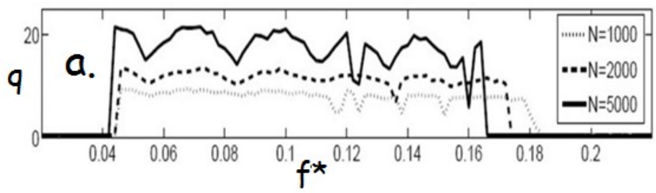
1. ábra: Kétmódusú tüzelő oszcillátorok dinamikája

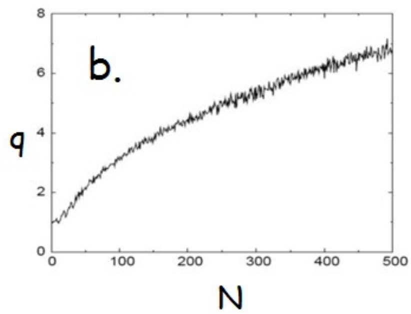
Ami azonban ebben a rendszerben történik, az sokkal több, mint egy egyszerű optimizáció! Ha f^* értéke nagyon nagy, minden oszcillátor a B_I módust választja, az oszcillátorok össze-vissza villognak és szinkronizáció nem jelenik meg. Ha f^* értéke nagyon kicsi, minden oszcillátor a B_{II} módust választja, az oszcillátorok megint össze-vissza villognak és szinkronizáció újból nem jelenik meg. A meglepetés az, hogy egy aránylag tág f^* intervallumon az oszcillátorok elkezdenek a két módus között váltogatni és ilyenkor az oszcillátorok tüzelései részlegesen szinkronizálódnak,a nnak ellenére, hogy semmilyen fáziskülönbség csökkentő kölcsönhatás nincs az egyedek között és hogy az oszcillátorok sajátperiódusai különbözőek és időben fluktuálhatnak.

A rendszer szinkrónizációs fokát egy $q = p / p_1$ rendparaméterrel jellemezzük, ahol *p* egy olyan mennyiség, ami a rendszer *f(t)* jelének a periodicitását jellemzi, a p_1 pedig egyetlen egy egyed jelének a periodicitását jellemzi a hosszú periódusú B_{II} módusban. A rendszer periodicitása alatt itt azt értjük, hogy mennyire jól közelíthető az *f(t)* függvény egy tetszőleges periodikus függvénnyel [6]. Számítógép-szimulációs eredmények a q rendparaméter átlagos értékére a 2a és 2b ábrán láthatók. A 2a ábrán az átlagos rendparamétert ábrázoljuk az $f*$ függvényében különböző *N* számú oszcillátorból álló rendszerekre. A 2b ábrán rögzített $f*$ esetén q értékét ábrázoljuk a rendszerben levő oszcillátorok számának a függvényében. A 2a ábrán látható, hogy létezik egy olyan $f*$ intervallum, amelyen az oszcillátor-rendszer egy erősen periodikus összjelet ad, vagyis az oszcillátorok pulzusai szinkronizálódnak. A szinkronizáció megjelenése és eltűnése hirtelen történik és a Kuramoto rendszerben megismert fázisátalakulásra emlékeztet. Érdemes felfigyelni arra tényre, hogy ezen szinkronizált állapotban $q > 1$, ami azt sejteti, hogy a rendszer sokkal inkább periodikus mint egy egyed külön! A 2b ábrán az is jól látható, hogy az oszcillátorok számának a növelésével a rendszer periodicitása monotonon növekszik. A meglepetést okozó szinkronizáció mellett ez egy újabb érdekes eredmény, ami azt sugallja, hogy a periódusukban ingadozó oszcillátoroknak egy ilyenszerű kapcsolásával pontos és jó periodicitású oszcillátor készíthető.

KÖVETKEZTETÉSEK

A szinkronizáció nagyon általános kollektív jelenség, amely sok természeti és társadalmi rendszerben megjelenik. Itt „izelítőként” bemutattunk néhány érdekes és meglepő eredményt valószerű oszcillátor-sokaságok esetére. Azon jelenségekre és modellekre fókuszáltunk, ahol sok oszcillátor kölcsönhatása során nemtriviális szinkronizáció alakult ki. A tárgyalt modellek hasznosak lehetnek biológiai és társadalmi jelenségek megértéséhez és ezeknek modellezésére.





2. ábra: (a) Fázisátalakulás-szerű szinkronizáció a kétmodusú oszcillátor sokaságban.

(b) A szinkronizáció mértékének a változása a rendszerben levő oszcillátorok számának a függvényében.

IRODALOMJEGYZÉK

1. S. Strogatz; Sync. The Emerging Science of spontaneous order (Hyperion, 2003)
2. Y. Kuramoto and I. Nishikava; J. Stat. Phys. vol. 49, 569 (1987)
3. A.T. Winfree, J. Theor. Biol. vol. 16, 15 (1967)
4. R. Mirollo and S. Strogatz; SIAM, J. Appl. Math. vol. 50, 1645 (1990)
5. A. Nikitin, Z. Néda and T. Vicsek; Phys. Rev. Lett. vol. 88, 590 (2002)
6. R. Sumi, Z. Néda, A. Tunyzagi and Cs. Szász, Phys. Rev. E vol. 79, 056205 (2009)
7. Z. Néda, E. Ravasz, Y. Brechet, T. Vicsek and A.L. Barabási, Nature vol. 403, 849 (2000)