ÉRDEKES KAOTIKUS MECHANIKAI RENDSZEREK

INTERESTING CHAOTIC MECHANICS SYSTEMS

Gruiz Márton
ELTE TTK Elméleti Fizikai Tanszék

ÖSSZEFOGLALÁS

A káosz egyszerű rendszerek bonyolult időbeli viselkedése. A középiskolák és az alsóbb éves egyetemi kollégiumok kísérleteiben vagy feladataiban előforduló fizikai (elsősorban mechanikai) rendszerek kis módosítással kaotikussá válnak. Ezek a példák is alátámasztják azt a tényt, hogy a minket körülvevő világban a kaotikus viselkedés nem kivételes, hanem éppen ellenkezőleg: tipikus.

ABSTRACT

Chaos is the complicated temporal behaviour of simple systems. The physical (mainly mechanical) systems occurring in the experiments and problems in secondary schools and lower-grade university lectures become chaotic if some slight modifications are made. These examples support the fact also that in the world surrounding us chaotic motion is not exceptional but on the contrary: typical.

KULCSSZAVAK/KEYWORDS
Káosz, kaotikus, mechanika
Chaos, chaotic, mechanics

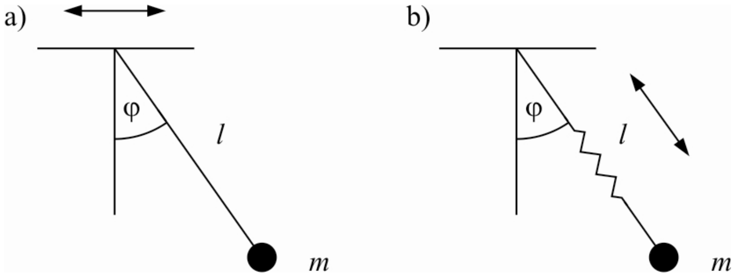
BEVEZETÉS

Az utóbbi néhány évtized jelentős tudományos felfedezése, hogy léteznek, sőt, nagyon is gyakoriak az egyszerű – néhány „alkatrészből” álló, fizikus nyelven: kis szabadságfokú – rendszerek bonyolult időbeli viselkedései, mozgásai. Az ilyen, úgynevezett kaotikus jelenségekben, a bonyolult viselkedés eredete bizonyíthatóan az összetevők nemlineáris kölcsönhatása, melyből következik a mozgásegyenlet nemlineáris volta is [1,2]. A nemlineáris mozgásegyenleteknek rendszerint nincs zárt alakban megadható megoldása, így – a középiskolákban szokásossal ellentétben – a mozgáspálya sem írható le egy (vagy véges számú) egyenlettel. Ilyenkor számítógép segítségét kell igénybe vennünk, s numerikus szimulációval meghatároznunk a mozgáspályát.

A LEGTÖBB KÖZÉPISKOLAI MECHANIKAI PROBLÉMA KICSI MÓDOSÍTÁS UTÁN KAOTIKUSSÁ VÁLHAT!

A káosz széleskörű tanulmányozására a számítógépek megjelenése teremtette meg a feltételt. Számítógépes szimulációkkal könnyedén vizsgálhatunk többek közt olyan egyszerű mechanikai rendszereket is, melyek a középiskolában ismert és tanított példák kis módosításai.

Gondoljunk például a matematikai ingára, mely a fizika egyik egyszerű alapproblémája, a középiskolai oktatásnak fontos része. Mozgása egyszerű, periodikus. Többféleképpen átalakíthatjuk, melyek közül most vizsgáljunk meg két lehetőséget: amikor a felfüggesztést vízszintesen rezgetjük, harmonikusan (szinuszosan) mozgatjuk (1.a ábra), illetve amikor az inga szárát rugalmassá tesszük (1.b ábra). Az előbbiben legyen a szögsebességgel arányos súrlódás is (disszipatív rendszer), a második viszont súrlódásmentes legyen (konzervatív rendszer). (Az egyszerűség kedvéért mindkét inga függőleges síkban mozogjon.)



1. ábra. A vízszintesen gerjesztett (a) és a rugós (b) inga.

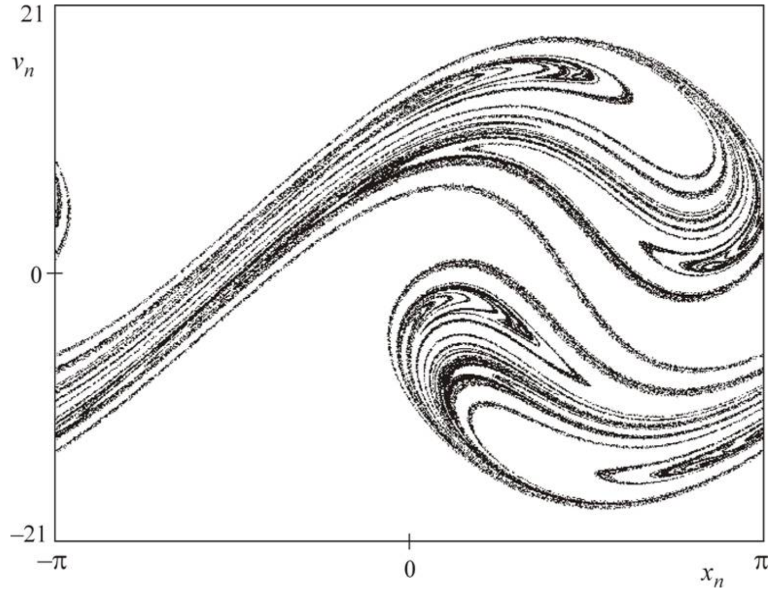
Tekintsük először az a) esetet. A bonyolult mozgásokat speciális ábrázolások, ún. leképezések segítségével szokták vizsgálni. Készítsünk a gerjesztett ingáról stroboszkópikus leképezést [1,2,3,4]! A mozgást olyan koordinátarendszerben (fázistérben) ábrázoljuk, ahol a vízszintes tengely az inga kitérésének pillanatnyi szöge, a függőleges pedig a szögsebessége. Ilyen ábrázolásban az inga mozgását egy folytonos vonal jeleníti meg. A stroboszkópikus leképezésnél azonban erre a fázistérbeli vonalra a gerjesztő periódusidőnként tekintünk csak rá, s az akkori pillanatnyi helyzetét (kitérés szögét és szögsebességét) ábrázoljuk egy ponttal. A felfüggesztést mozgató harmonikus rezgés minden egyes periódusa alatt csak egyetlen pont képződik le. Tehát a mozgást folytonos vonal helyett most már egy ugráló pontsorozattal követjük.

Természetes módon adódik a kérdés: periodikus mozgást végző ingának mi a képe a stroboszkópikus leképezésen? Minden periodikus mozgást végző rendszer meghatározott időnkén (periódusidőnként) definíció szerint ugyanolyan állapotba kerül, tehát ha periódusidőnként képzünk le egy pontot (nézzük meg a mozgásállapotát), akkor az mindig ugyanaz lesz. Bármeddig végezzük a szimulációt, a leképezés mindössze egy pont lesz.

Mi történik, ha bekapcsoljuk a gerjesztést? Bizonyos paraméterek (súrlódás, gerjesztő amplitúdó és gerjesztő frekvencia) mellett a leképezett pontok teljesen össze-vissza, szabálytalanul ugrálnak. Pár ezer pont leképeződése után (egy mai számítógéppel ez kb. 10 másodpercig tart) azonban kezd kirajzolódni egy határozott struktúra, láthatóvá válik az ún. kaotikus attraktor (2. ábra). A kaotikus attraktor egy geometriai alakzat, méghozzá nem is akármilyen: egy fraktál [1,2,5]. Bármilyen kezdőfeltételből indítjuk is a mozgást, mindig erre a struktúrára ugrál rá a pont (ezért hívjuk attraktornak), majd utána szabálytalanul mozogva a kaotikus attraktoron marad. A kaotikus attraktort azért látjuk, mert elegendő idő alatt a rajta ugráló pont szép lassan kirajzolja nekünk az egész szerkezetet. A kaotikus attraktor kiterjedt, de mégis nulla térfogatú (síkban: felületű), önhasonló, szálas struktúra, azaz akármilyen nagy nagyítást készítünk róla, mindig azonos bonyolultságú szálas szerkezetet fogunk látni.

Ne felejtsük el, hogy egy periodikusan mozgó inga képe a stroboszkópikus leképezésen csak egyetlen pont lenne. A kaotikus attraktorhoz, ehhez a végtelen számú kis szálból álló „hajtogatott leveles tésztához” [4] tartozó kaotikus mozgás tehát „végtelenszer bonyolultabb”, mint egy periodikus.

Ez azonban nem jelenti azt, hogy bárhogyan mozoghat! Tudniillik nem zajról van szó. Ha zaj lenne, akkor a stroboszkópikus képen egy területet, igaz véletlenszerűen ugrálva, de besatírozna. Zaj esetén – a leképezés pillanatában – tetszőleges kitéréshez tetszőleges szögsebesség tartozhatna. Esetünkben azonban nem erről van szó. A szög-szögsebesség síkon hatalmas üres foltok vannak, s ha megnézzük, hogy egy adott x_n kitéréshez milyen v_n szögsebességek tartozhatnak (szemléletesen: ahol egy képzeletbeli függőleges vonal metszi a struktúrát), akkor láthatjuk, hogy bár valóban végtelen különböző, de csak bizonyos meghatározott értékek lehetségesek.

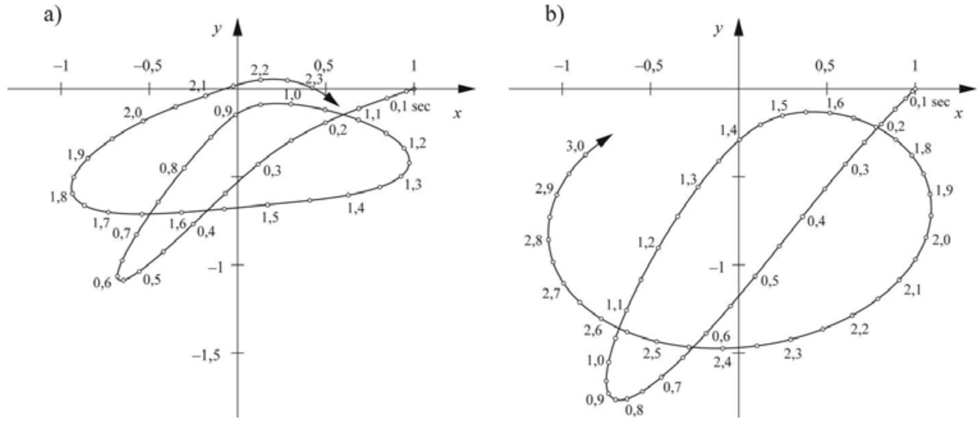


2. ábra. A gerjesztett inga (1.a ábra) kaotikus attraktora a stroboszkópikus leképezésen. x_n a kitérést, v_n a szögsebességet jelöli. Az n index az egymás után leképezett pontok sorszámozására utal.

Az 1.b ábrán bemutatott rugós ingának magyar vonatkozású tudománytörténeti jelentősége is van [6,7,8]. Az 1965. évi OKTV második fordulójának első feladatában szerepelt egy nyújtatlan, vízszintes rugóra akasztott test, melyet elengednek. A kérdés: mekkora a rugó megnyúlása, amikor a test éppen a felfüggesztési pont alatt halad át?

Utólag derült ki, hogy a feladat nem megoldható! Vermes Miklóst, az ismert fizikapedagógust, az OKTV bizottságának elnökét nem hagyta nyugodni a probléma. Azonban hosszas számolgatással is csak közelítő eredményt tudott megadni arra az esetre, ha a rugó megnyúlása kicsi [6]. Vermes Miklós nem elégedett meg a számítási eredményeivel, ezért, az akkor modernek számító Ural II elektroncsöves számítógépen folytatta a kutatást. Egyszerű numerikus módszerekkel szimulált hét különböző kezdőfeltételből indított mozgást, melyek hossza – az inga valós idejében számolva – körülbelül mindössze 3 másodpercig tartott (3. ábra) [7]. Modern numerikus módszerekkel és a mai számítógépek teljesítményének kihasználásával könnyedén tudunk nagyságrendekkel hosszabb szimulációkat is végezni. Ezt meg is tettük [8], s nemcsak hosszabb idejű térbeli pályákat rajzoltunk fel, hanem a 2. ábrához hasonló leképezéseket is készítettünk.

Kiderült, hogy a Vermes Miklós által vizsgált hét mozgásból három volt kaotikus, s négy kváziperiódikus (egy kaotikus rendszerben is léteznek periodikus és kváziperiodikus mozgások, még azonos paraméterek mellett is, függően a kezdőfeltételektől). Ő azonban semmit nem tudhatott erről, hiszen a káoszelmélet első alapcikkei az 1960-as években jelentek meg. Mint megválaszolandó kérdés, a probléma valószínűleg fel sem merült. Minden bizonnyal a „szabálytalan” jelzővel illette volna a mozgásokat.



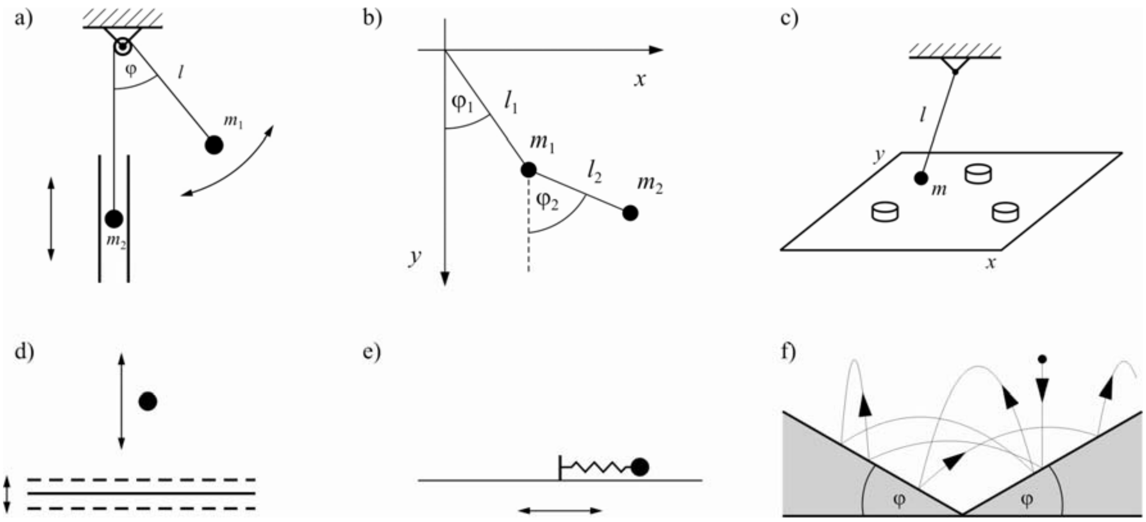
3. ábra A rugós inga néhány másodperces térbeli pályája két különböző rugóerő és tömeg esetén. Az ábrák Vermes Miklós 1967-ben publikált [7] úttörőnek számító szimulációjának és ábrázolásának rekonstrukciója.

Ez a példa is rávilágít a kaotikus mozgásoknak a számítógépes vizsgálata során felmerülő érdekes és fontos jellemzőjére: egy kaotikus rendszer tulajdonságaiba nem nyújt betekintést a mozgásegyenlet puszta alakja! Esetünkben nemcsak leképezések megalkotásához, hanem még a felfüggesztési pont alatti első(!) áthaladás kiszámításához is számítógép segítségét kellett igénybe venni.

Hiába egyszerű tehát egy mechanikai rendszer. Mivel a mozgásegyenletek nemlineárisak, könnyen kialakulhat káosz. Ilyenkor viszont a tulajdonságok felderítéséhez már nélkülözhetetlen a számítógép, mellyel a szó valódi értelmében „felfedezés” a feltáró munka…

Vermes Miklós 1967-es cikke az ebbe az irányba tett első lépés a magyar fizikában.

A felvillantás szintjén, a téma iránt érdeklődők kedvért megemlítünk hat további olyan kaotikus mechanikai rendszert (4. ábra), melyek a módosítások után kaotikussá váltak [1,2]: a) ejtőgép, ahol az egyik tömeg függőleges síkban kilenghet, b) kettős inga, c) mágneses inga (három mágnest helyezünk a ferromágneses végű inga alá, mely némi „bolyongás” után az egyik mágnes fölött áll meg), d) rezgő lemezen pattogó golyó, e) anharmonikus oszcillátor (rugó), f) szemben álló lejtőkön pattogó golyó.



4. ábra. Egyszerű mechanikai rendszerek olyan módosított változatai, melyek kaotikus mozgásra is képesek.

A KAOTIKUS RENDSZEREK LEGFONTOSABB TULAJDONSÁGAI

Az eddig elmondottak alapján, illetve azt kiegészítve, foglaljuk össze a kaotikus rendszerek legfontosabb jellemzőit [1,2]!

A káosz *egyszerű rendszerek bonyolult időbeli viselkedése.* E meghatározás szerint a káosz (a hétköznapi szóhasználattal szemben) nem térbeli, nem statikus rendetlenség. A káosz tehát egy mozgási típus, általánosabb értelemben időbeli fejlődés. Számos hétköznapi folyamat (a biliárd vagy a flipperautomata golyójának mozgása, áramkörök begerjedése, festékek keveredése) mellett szerepel műszaki, kémiai, biológiai jelenségekben, betegségek lefolyásában, gazdasági részfolyamatokban, és jóval nagyobb léptékben: például a Föld mágneses tengelyének váltakozásában vagy a Naprendszer alkotóelemeinek mozgásában.

A mechanikában a Newton egyenlet határozza meg a mozgást, tehát a kaotikus mechanikai rendszerek elvi szinten determinisztikusak. Mégis, a kaotikus rendszerek *valószínűségi* viselkedést mutatnak és mozgásuk *előrejelezhetetlen.* Az előrejelzési időn túl a pálya fogalma értelmetlenné válik, csak a *valószínűségi leírás* értelmes.

Egyszerre determinisztikus és előrejelezhetetlen. Nincs itt valami ellentmondás? Nincs, s ez könnyen megérthető az alábbi gondolatkísérletünk segítségével. Határozzuk meg egy kaotikus mechanikai rendszer (mondjuk rugós inga) kezdőfeltételeit ezred pontossággal. Nézzük meg, mennyi ideig mozog egyformán két olyan egyforma rugós inga, melynek egy ezred eltérés volt a kezdőfeltételeik között. Kiderül, hogy mondjuk tíz másodpercig. Tehát ezred pontossággal megmért kezdőfeltételű rugós inga helyzetét tíz másodpercig tudom meghatározni. Rendben, akkor lépjünk tovább: határozzuk meg (mérjük meg) a kezdőfeltételeket ezerszer pontosabban, azaz milliomod pontossággal! Kiderül, hogy húsz másodpercig tudok jósolni, ha pedig milliárdod pontossággal mérek, akkor is csak harminc másodpercig. Látható, az exponenciális hibanövekedés miatt (ami csak a kaotikus rendszerek jellemzője!) esélyünk sincs, hogy egy ilyen rugós ingának a helyzetét egy percen túl is meg tudjuk jósolni. Nemcsak gyakorlatban, hanem elvileg sem! Vessük ezt össze azzal, hogy a szabályosan mozgó égitestek helyzetét évtizedekre, sőt, évezredekre (!) is képesek vagyunk meghatározni. Összefoglalva: a kaotikus rendszerek előrejelezhetetlenségének oka *a kezdeti feltételekre mutatott extrém érzékenység*.

Fontos hangsúlyozni, hogy a káoszt nem külső hatások, hanem a belső dinamika, az állandósult *instabilitás* okozza. A káosz nem zaj, hanem „átmenet” a szabályos mozgás és a zaj között.

A kaotikus mozgás *semmilyen időskálán nem ismétli önmagát*, tehát egy kaotikus rendszer egy adott pillanathoz tartozó mozgásállapota – bármeddig is mozog – csak egyszer fordulhat elő.

A KÁOSZ OKTATÁSÁNAK PEDAGÓGIAI VONATKOZÁSAI

Természetes módon adódik a kérdés: a kaotikus jelenségeket tanítsuk-e a középiskolásoknak és az alsóbb évfolyamos egyetemistáknak, vagy sem [9,10,11,12]? Az igen mellett gyakori érv, hogy – mint kiderült – a világunkban a kaotikus jelenségek nem kivételesek, hanem tipikusak. Ha pedig így van, akkor milyen alapon tanítjuk csak a kivételeket? (Persze a hangsúly a „csak”-on van, ugyanis az alapismeretek elsajátítása kétségtelenül a ma is tanított egyszerű (nem kaotikus) mozgások útján valósítható csak meg.)

A káosz oktatásának azonban lenne számos „járulékos” haszna, egyéb pedagógiai hozama is. Talán ezek az előnyök még lényegesebbek is. Mik is ezek? A szóban forgó terület oktatása pedagógia, didaktikai szempontból megfontolásra érdemes az alábbiak miatt:

- az érdekes témák *motivációs* szerepe és ereje,
- az *esztétikai élményt* nyújtó ábrázolások,
- a *tevékenység centrikus* oktatás lehetősége,
- a hallgatók/diákok *önálló (kutató)munkájának* lehetősége,
- a megtapasztalható *„felfedezés élmény”*,
- a természetes módon adódó *számítógép használat*,
- a természettudományos és filozófiai *szemléletformálás*,
- a csoportmunka esetén a *kooperatív képességek* fejlődése.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Tél Tamás, Gruiz Márton: *Kaotikus Dinamika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
2. Tél Tamás, Gruiz Márton: *Chaotic Dynamics*, Cambridge University Press, 2006.
3. R. Van Dooren, Chaos in a Pendulum with Forced Horizontal Support Motion (Chaos,Solitons & Fractals 7., 77., 1996)
4. Gruiz Márton: *A kaotikus mechanika kapcsolata Platónnal és a leveles tésztával*, Természet Világa, 1998. Szeptember, 129. évf. 9. sz., 389.-393. oldal.
5. Tél Tamás, Törtdimenziós rendszerek, a fraktálok. In: Természet Világa, 115.évf., 106.oldal, 1984
6. Vermes Miklós és Wiedemann László, A rugalmas fonalú ingáról, Fizikai Szemle 26 o., 1966/1.
7. Vermes Miklós, Rugalmas fonalú inga lengése, Magyar Fizikai Folyóirat, 397 o, 1967.
8. Gruiz Márton, Radnai Gyula, Tél Tamás: *A Rugalmas Fonalú Ingáról – Mai szemmel – Vermes Miklós emlékezetére*, Fizikai Szemle, 2006. október, 56. évf. 10. sz., 337.-343. oldal.
9. Szatmári-Bajkó Ildikó, „Káoszt”? – Azt!, Káoszelmélet a középiskolában, Fizikai Szemle, 376 o., 2006/11.
10. Csorba F. László, *Új tudomány: A káosz*, Új pedagógiai szemle 2000/09
11. E. L. Jossem, Nemlineáris jelenségek: új kihívás az oktatás számára, Fizikai Szemle 38. évf. 1988. p. 288
12. F. Hermann, L. Mingirulli, P. Morawietz, *A káosz tanítása iskolákban*, Fizikai Szemle 38. évf. 1988. p. 301

SZERZŐ

Gruiz Márton, ELTE TTK Elméleti Fizikai Tanszék,
PhD hallgató (ELTE PPK Neveléstudományi Doktori Iskola),
gmarton@t-online.hu