STATISZTIKUS TÖRVÉNYSZERŰSÉGEK EGYSZERŰ DEMONSTRÁLÁSA GALTON-DESZKÁVAL

SIMPLE DEMONSTRATION OF STATISTICAL LAWS WITH GALTON-BOARD

Gyertyán Attila[1], Dr. Juhász András[2]
[1]ELTE Apáczai Csere János Gyakorlóiskola, Budapest,
[2]ELTE Anyagfizikai Tanszék, Budapest

ÖSSZEFOGLALÁS

A Galton-deszka egy régóta ismert eszköz, mely a binomiális eloszlás egy modelljét valósítja meg. Látványossága folytán kiválóan alkalmas demonstrációs eszköznek, mind matematikából, mind pedig fizikából. Fizika órán a statisztikus törvényszerűségek működési elvét mutathatjuk be, azt hogy mit is értünk sokaságon, és hogyan alakul ki sok véletlenszerű viselkedés összességéből jól leírható mintázat. Munkámmal szeretném felhívni a figyelmet ennek a kissé elfelejtett eszköznek a sokoldalúságára.

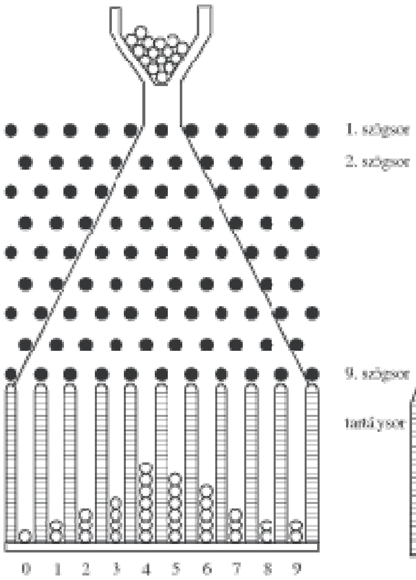
ABSTRACT

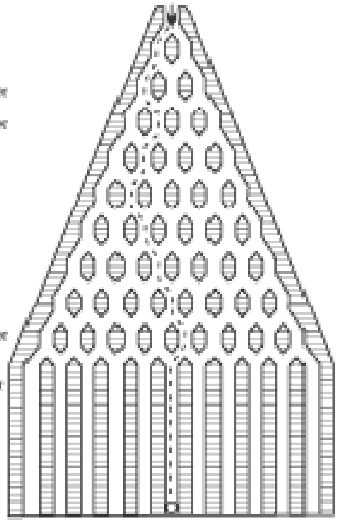
The Galton-board is a device for experiments with binomial distribution. Since it's quite attractive, it is an excellent demonstration device both for mathematics and for physics. On physics lesson we can use it to demonstrate the working method of statistical laws, the meaning of statisctical ensemble. Also it can be observed how a well describeable pattern evolves from the assemlby of many random events. I'd like to evoke this quite forgotten devices versatility.

KULCSSZAVAK
Galton-deszka, statisztikus fizika, binomiális eloszlás
Galton-board, statistical physics, binomial distribution

BEVEZETÉS

A Galton-deszka eredeti alakjában olyan deszka, amelyre egymással párhuzamos sorokba rendezett szögek vannak elhelyezve (szögsorok), mégpedig úgy, hogy egy adott szögsor szögei mindig a megelőző sor szögei közti intervallumok középpontjai alá esnek egymástól egyenlő távolságban. Az általában függőlegesen vagy lejtősen felállított deszkára egy, az első szögsor középső szöge felé, a szögsorokra merőlegesen irányított tölcséren keresztül apró golyókat lehet bocsátani, amelyek átmérője egyforma és csak kevéssel kisebb, mint a szögek közti távolság. A leguruló golyók nekiütközve az első szögsor szögének, ott véletlenszerűen jobbra vagy balra térnek el. Akármelyik irányba is tért el egy leguruló golyó, a szögek közti „csatornákon" továbbjutva ismét beleütközik a következő szögsor valamelyik szögébe, ahol ismét véletlenszerűen jobbra vagy balra tér el s így tovább, míg végül a deszka utolsó szögsorán való ütközés után a golyó a deszka alján levő tartálysor valamelyik tartályába kerül (1. ábra). Az ideális Galton-deszka egy másik modellje látható a 2. ábrán, mely a valóságban jobban teljesíti az elméleti feltételeket, mivel az ék alakú „szögek” ténylegesen úgy vezetik a golyókat, hogy azok függőlegesen érkezzenek a következő ékre.



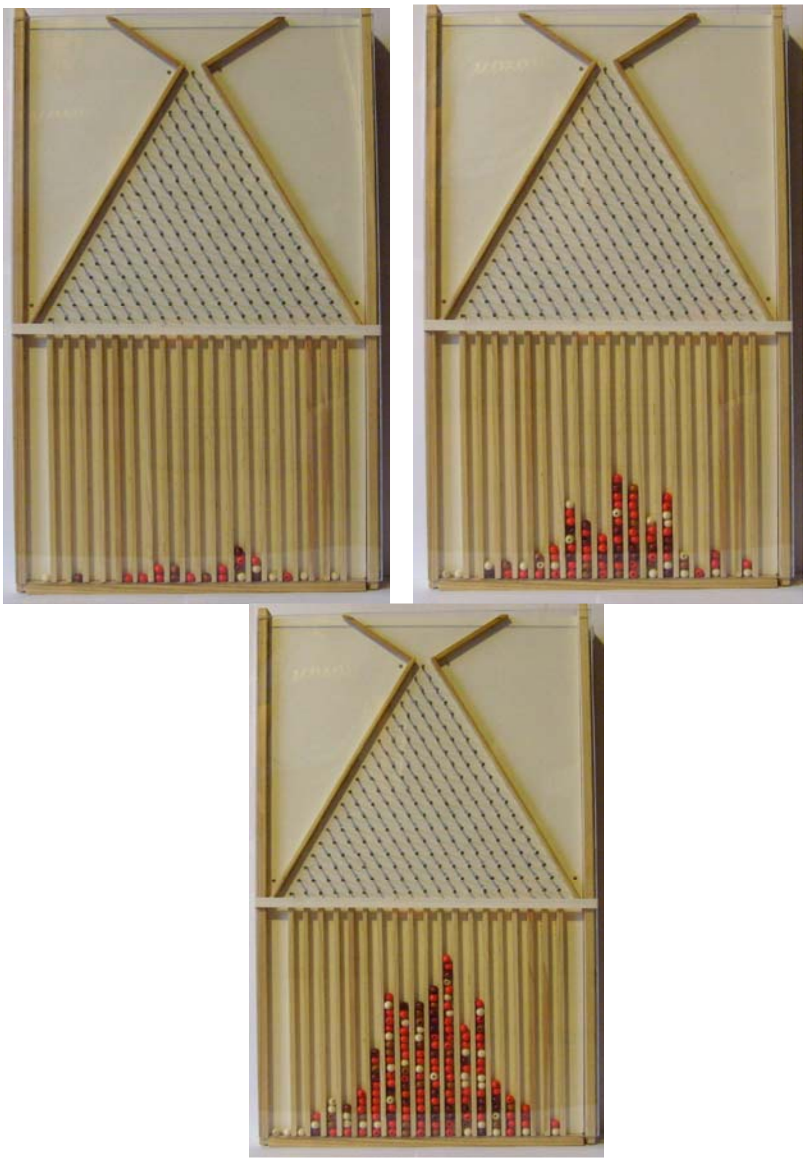


1. ábra A Galton-deszka 2. ábra Egy másik modell

Ha feltesszük, hogy a golyók nem tudnak két szöget ugrani egyszerre, akkor láthatjuk, hogy a Galton-deszka lényegében egy szabályos háromszög alakjára egyszerűsíthető. Így minden következő sorban eggyel több szög található, mint az azt megelőzőben. Az ideális Galton-deszka esetében az egymást követő „útválasztások” nem függenek az előzőtől, vagyis minden ütközés esetén 0,5-0,5 eséllyel tér el jobbra illetve balra. Ez a feltétel a valódi Galton-deszkákra nem feltétlenül teljesül, de az egyszerű matematikai tárgyaláshoz feltétlenül szükséges. Így a Galton-deszka fizika és matematika órán egyaránt téma lehet.

GALTON-DESZKA A FIZIKA ÓRÁ(KO)N

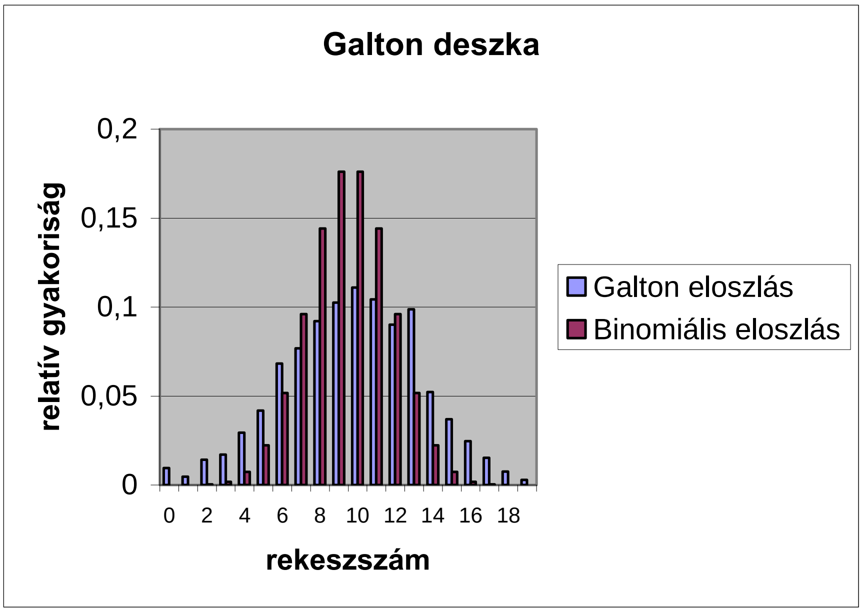
A deszka fizikaórán fontos szerepet játszó eszköz lehet. Nagyon szemléletesen demonstrálja a statisztikus fizika alapvető gondolatvilágát. Vegyünk sok-sok azonos fizikai „rendszert” (ezek lesznek a golyók, melyek mindannyian ugyanazon a pályán haladnak végig)! Egyenként nem tudjuk, illetve nagyon bonyolult lenne megadni az életútjukat, praktikusan azt, hogy melyik rekeszbe érkeznek végül. Viszont ha nagy mennyiségű golyót vizsgálunk akkor jellegzetes viselkedés-mintákat tapasztalhatunk. A jelenség bemutatására elkészítettem egy saját építésű Galton-deszkát (3. ábra). Ez 50x30 cm alapterületű, és nagyjából 8 cm magas. A méreteit úgy próbáltam kialakítani, hogy demonstrációra alkalmas, tehát messziről is jól látható (ezt szolgálja a golyók mérete, és színe is), de még viszonylag könnyen szállítható legyen. Ez a deszka így kb. 2-3 kg, tehát külön segédeszköz nélkül mozgatható. Az elkészítése, amint arról később említést is teszek, nem túl sok időt vesz igénybe, két-három délután alatt elkészíthető, a tervezést és az anyagbeszerzést is figyelembe véve. Ezzel az eszközzel végeztem el egy kísérlet-sorozatot, melyben a golyók statisztikus viselkedését vizsgáltam. Amíg kis számú golyóval végezzük a kísérletet (3. Ábra első kép: 23 golyó), azok elhelyezkedése teljesen véletlenszerűnek hat. Ha a golyók számát növeljük (3. ábra második kép: 85 golyó) már megfigyelhetjük a deszkára jellemző eloszlás alakulását. A Galton-deszka rekeszeiben kialakuló eloszlás ugyanis szemmel láthatólag nem változik olyan nagy mértékben, mint a golyók pályái, egy maximumgörbét láthatunk minden esetben. Sőt, a maximum helye sem változik (vagy valódi deszka esetében, 100 körüli golyó szám esetén legfeljebb egy-egy rekesszel tolódik jobbra vagy balra), és az eloszlás szélein mindig nagyon kevés golyót figyelhetünk meg. Ha teljes golyószámmal végezzük a kísérletet (3. ábra harmadik kép: 173 golyó), akkor kifejezetten a binomiális eloszlásra emlékeztető képet kapunk. Természetszerűleg a deszka kézi készítése miatti hibáinak köszönhetően az eloszlás nem pontosan binomiális, és akkor sem válna azzá, ha többször egymás után elvégezve a kísérletet, az eredményeket összegeznénk. Viszont azt megfigyelhetjük, hogy már 4-5 kísérlet összegzése esetén a végeredmény elég keveset változik, kialakul egy erre a deszkára jellemző eloszlás.



3. ábra Az eloszlás kialakulásának lépcsői

Ezzel szemléltethetjük a statisztikus gondolkodásmód legalapvetőbb elemét. Meg tudunk állapítani törvényszerűségeket sok golyó *együttes* viselkedéséről, annak ellenére hogy egy-egy golyó útját nem tudjuk előre megjósolni. A sokaság viselkedésében kialakulnak olyan mintázatok, melyek az egyes elemek önálló viselkedéséből nem látszanak, és fordítva: a sokaságra vonatkozó törvényszerűségek nem mondanak lényegében semmit az egyes elemek életútjáról. A Galton-deszka esetében nem tudjuk megmondani, hogyha elindítunk rajta egy golyót, az hová fog érkezni. Ha azonban sok golyót indítunk el, elmondhatjuk, hogy ezek nagy része a középső négy-öt rekeszbe érkezik majd, ahol is kialakul egy maximum, a szélső rekeszekbe pedig jóval kevesebb golyó érkezik majd. Sőt, ha a golyók számát tovább növeljük (ami az elkészített demonstrációs eszköz esetében több egymás utáni kísérlet összegzésével érhető el) nagyon pontos előrejelzéseket tudunk tenni arról, hogy a golyók mekkora hányada érkezik a rekeszekbe. Továbbra sem tudjuk a soron következő golyó érkezési helyét megjósolni azonban! Fontos ezt a különbséget hangsúlyozni, mert általános félreértés a valószínűség, illetve a statisztikák és a nagy számok törvényének működésével kapcsolatban, hogyha a relatív gyakoriság aktuális értéke nagyon eltér a valószínűségtől, akkor a következő kísérlet eredménye nagyobb eséllyel lesz olyan, ami a különbséget csökkenti, mint ellentétes. Ez a hibás gondolkodás is megvizsgálható a Galton-deszkánál: attól, hogy épp nem a középső rekeszben van a legtöbb a következő golyó még nyugodtan kerülhet ismét a szélére. A törvényeink tehát mindig a sokaság egészére vonatkoznak, és nem az egyes elemekre. Ennek a gondolatnak kiváló szemléltetése a Galton-deszka. Előnye, hogy ha úgy gondoljuk a gyerekek vevők rá, és matematikából már tanulták a szükségeseket akkor tovább lehet lépni a kvalitatív törvényszerűségek felől a kvantitatív leírás felé.

Kiváló projekt-feladat lehet fizikából egy Galton-deszka elkészítése. Ez ugyanis anyagilag viszonylag olcsón megoldható, nem kell hozzá különösebb technikai képzettség, sem különleges eszközök. Ellenben pontos tervezést, és gondos megvalósítást igényel, valamint akár több fős csoportok esetén is mindenkinek jut vele munka. Az elkészült deszkáknak utána meg lehet vizsgálni a saját karakterisztikáját, és megállapítani, hogy mennyire közelíti meg az ideálist. Az általam elkészített eszközzel végzett sok mérés összesített eredményét (összesítve 865 golyó) az alábbi diagramon hasonlítottam össze az elméleti, binomiális eloszlással:



4. ábra A kísérleti és az elméleti értékek összehasonlítása az elkészült Galton-deszka esetén

Az elméleti eloszlás: $P(x=k)=0,5^{20}\cdot\binom{20}{k}$

Az összehasonlításból rögtön szembetűnnek a különbségek és a hasonlóságok egyaránt. A maximum-görbe jelleg, és a szimmetrikus „lecsengés” egyaránt jellemzi az elméleti és tapasztalati görbét. A különbség, hogy a binomiális eloszlás sokkal meredekebb, maximuma jóval élesebb. Hogy ennek mi lehet az oka, az újabb érdekes kérdéseket vethet fel: vajon mely feltételek nem teljesülnek az ideális deszkához képest?

A GALTON-DESZKA MATEMATIKÁJA

A Galton-deszka matematikai leírása akár fizikai felhasználása, akár matematikai szépsége okán előkerülhet matematika órán. A binomiális eloszlás egy nagyon szép iskolapéldája, mely több úton és sok különféle gondolatmenettel vizsgálható. Ráadásul több szinten is vizsgálható. Az egyes rekeszekbe vezető utak leszámlálása egyszerűbb kombinatorikai feladat, ezen keresztül az egyes rekeszekbe jutás valószínűsége könnyen kiszámítható. Később aztán a nem-szimmetrikus eset is végigkövethető, amikor a szögeken jobbra, illetve balra eltérülés valószínűsége nem azonos. Ebben az esetben a maximum-hely a nagyobb valószínűségű irány felé tolódik el, ezt úgy tudjuk bemutatni, ha valamelyik irányba megdöntjük a deszkát, és úgy végezzük vele a kísérletet. Sőt akár a nem-független ütközések esete is tárgyalható tehetséges, illetve érdeklődő diákok csoportjával. A fizikához könnyen lehet kapcsolódni itt, hiszen a statisztikus fizika matematikai hátterét éppen a valószínűség-számítás adja. A valószínűség nehezen megfogható matematikai fogalom, így a matematika számára pedig jól jön egy gyakorlati felhasználás, amelyen jól látszik, hogy mit is jelent tulajdonképpen a valószínűség. Ebben nagy segítséget jelenthetnek a számítógépes szimulációk is. Ezeken ugyanis akár azt is szemmel követhetjük, hogy hogyan közelíti egyre jobban relatív gyakoriság a valószínűséget, ahogy egyre több golyóval végezzük el a kísérletet. Ez jó szemléltetése a nagy számok törvényének is, hiszen több számítógépes kísérletet elvégezve tapasztalhatjuk azt is, hogy olykor (de nagyon ritkán!) sok golyó után sem simul még rá teljesen a relatív gyakoriság diagramja a valószínűségekére. Itt megint utalhatunk a statisztikus fizikára, amelyben rendszerint mólnyi mennyiségekkel dolgozunk. Vagyis akkora számokkal amiket szimulációval sem tudunk vizsgálni, tehát teljesen jogosan használhatjuk az elméletileg számított valószínűség-értékeket a valós relatív gyakoriságok becslésére.

A Galton-deszkával kapcsolatos elképzelések gyakorlati kipróbálására sajnos ez idáig nem adódott alkalmam. A diákcsoportok akikkel dolgoztam mindegyike 7-ik illetve 8-ik évfolyamos volt, míg erről az anyagról úgy képzelem, elsősorban 10. vagy 11. osztályban lehetne érdemben foglalkozni vele. Így inkább egy rövid ötlettárat szerettem volna alkotni, amely egyrészt felhívja a figyelmet erre a némileg elfelejtett eszközre, másrészt ad némi kiindulási alapot az órákon való felhasználási lehetőségekhez. Természetesen amint lehetőségem adódik rá, magam is kipróbálom, hogyan fogadják a diákok a statisztikus fizika alapjelenségeit, és amennyiben hasznos tapasztalatokkal gazdagodom, ezeket valamilyen fórumon meg is osztom majd a tanári közösséggel.

A Galton-deszka tehát olyan eszköz, amely mind fizikából, mind matematikából kiváló szemléltető eszköz lehet. Ráadásul nagyon jó terepet nyújt a két tantárgy összekapcsolásának, kölcsönös segítésének. Számítógéppel is segíthetőek a vizsgálatok, amelyek az informatika iránt elkötelezett diákok érdeklődését is felkelthetik. Sokoldalú eszköz tehát, mely nem újdonság, de talán az utóbbi években kissé kiszorult az oktatási gyakorlatból.

IRODALOMJEGYZÉK

1. http://www.tankonyvtar.hu/main.php?objectID=5785224

SZERZŐK

Gyertyán Attila: ELTE Apáczai Csere János Gyakorlóiskola matematika-fizika szakos tanára, email: gyertyan.attila@t-online.hu
Dr. Juhász András: ELTE Anyagfizikai Tanszék, egyetemi docens, email: juhy@ludens.elte.hu