DIMENZIÓANALÍZIS ÉS MODELLEK

DIMENSIONAL ANALYSIS AND MODELS

Hömöstrei Mihály
Német Nemzetiségi Gimnázium, Budapest

ÖSSZEFOGLALÁS

Előadásom célja, hogy bemutassam a dimenzióanalízist, s példákon keresztül illusztráljam, hogyan lehet ezt a mai középiskolai oktatásban használni. Olyan összefüggéseket vizsgálhatunk meg a diákokkal, melyeket más módon a középiskolában nagyon nehéz lenne, vagy egyenesen lehetetlen – megfelelő matematikai háttér híján. A módszer használatával a fizikai mennyiségek jelentését és a modellépítés mechanizmusát is jobban megértheti a diák. A dimenziók vizsgálata könnyen levezethető, megérthető összefüggésekre vezet meglepően sokrétű kérdésekben, mint például Kepler III. törvénye, vagy például a Planck-állandó nélkülözhetetlensége.

ABSTRACT

The object of my discourse is to interpret the dimensional analysis, and I would like to illustrate through samples, how we could use this method in the present day physics teaching at high school. This method would enable us to analyze laws and coherences with the students, which otherwise would be very difficult or impossible – due to lower level of mathematical knowledge. Through using the dimensional analysis our student will understand the meanings of the physical quantities and the mechanism of model-building better. The analysis of dimensions lead us to easily understandable coherences, in surprisingly many questions, such as the Kepler's third law, or the indispensability of the Planck constant

KULCSSZAVAK
Dimenzió, egyszerű, hatványfüggvény
Dimension, simple, power function

BEVEZETÉS, A MODELLEKRŐL

Amennyiben lehetőségünk adódik rá, a már készen kapott, kidolgozott modellek helyett, hasznos, ha a diákok maguk építik fel logikai úton a saját elképzeléseiket, saját modelljeiket. Így nem csak maradandóbb tudást kapunk eredményül, hanem a tanulók átélhetik a tudományos és gondolati felfedezés örömét! Ez az élmény talán még fontosabb, mint a tudás, amit hirtelen megszereznek, majd talán el is felejtenek, hiszen az élmény a későbbiekben is egy nagyon erős motivációs eszköz lehet. Fontos megjegyezni, hogy a dimenzióanalízist, mint modellalkotási módszert, már sikerült a gyakorlatban egyik végzős csoport extra fizika óráján megvizsgálni. A módszer iránt rendkívüli lelkesedést és érdeklődést mutattak a diákok!

A DIMENZIÓ

A dimenzióanalízis nem túlságosan elterjedt módszer ma Magyarországon, főleg nem a középiskolákban. De mi is a dimenzió? Egy adott fizikai képletben egy adott mennyiségnél a „dimenzió” rész a „nagyság” „vonatkoztatási alapját” azonosítja. Nagyon fontos tulajdonság, amelyet a dimenzióinktól megkövetelünk, hogy a mérésünk eredménye független legyen a mértékegység megválasztásától. Ez tömören azt jelenti, hogy például a hosszúság mérésénél, a mértékegységet λ-szorosára változtatjuk, akkor a hosszúság új számértéke 1/λ-szorosára kell változzon, ezzel biztosítva a hosszúság dimenziójának mértékegységtől való függetlenségét. A terület esetében a nagyság vonatkoztatási alapja például az egységnégyzet területe. A területet négyzet esetében $T=a^2$ összefüggéssel számolhatjuk, ahol a az adott négyzet oldalhosszúsága, ami hosszúság dimenziójú mennyiség. Ebből egyből látszik a terület dimenziója is, hosszúság négyzet; SI-ben a m^2.

A DIMENZIÓANALÍZIS, MINT MÓDSZER

A dimenzióanalízis célja, a vizsgált fizikai mennyiséget/jelenséget befolyásoló tényezők feltárása, hogy ezáltal képet kaphassunk a jelenségről. Meghatározó, hogy a felállított összefüggés a paraméterek dimenzióira nézve is helytálló kell legyen. Ha a vizsgálatban nem veszünk figyelembe minden olyan tényezőt, amely a jelenséget befolyásolja, akkor felállított egyenletünk dimenzionálisan nem lesz helyes. A dimenzióanalízisnek, mint módszernek az előnye, hogy egy matematikai összefüggés felállítása több változó esetében is egyszerűen végrehajtható. Hátránya, hogy félempirikus egyenletet kapunk, tehát néhány gyakorlati mérést elkerülhetetlenné tesz, valamint a meghatározó paraméterek kiválasztása nagy körültekintést igényel!

A levezetések közben azt a logikai menetet fogjuk követni, miszerint:

1.: Nem felejtjük el, hogy az általunk gyártott összefüggéstől alapelvárás, hogy a két oldalán a dimenziók megegyezzenek.

2.: Végig kell gondolnunk, vajon mitől függhet az általunk vizsgált mennyiség.

3.: Egyszerű, de annál fontosabb korábbi fizikai ismereteinket is segítségül hívjuk.

Fontos kérdés még, hogy milyen függvény formájában keressük a keresett mennyiségünkre az összefüggést. A dimenzióktól elvárt tulajdonság, az alapegység megválasztásától való függetlenség adja a választ. Így a dimenzionálhatóság megtartásához a lehetséges változók hatványfüggvényei adódnak, illetve természetesen kaphatunk még dimenzió mentes függvényt is - pl.: $X = C \cdot a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot \ldots \cdot \Phi(\omega_1, \omega_2 \ldots)$, ahol X a keresett fizikai mennyiség, C egy dimenzió nélküli konstans, *a, b, c…* pedig az adott fizikai mennyiséget befolyásoló paraméterek, $\Phi(\omega_1,\omega_2,\ldots)$ pedig a lehetséges ω_i dimenziótlan változókból képzett dimenziómentes függvény. A hatványfüggvények szorzása megtartja nekünk a dimenzionálhatóság feltételeit, a $\Phi(\omega_1,\omega_2,\ldots)$függvényről pedig esetleg további mérésekkel kaphatunk információt. A matematikai inga mozgásánál kis kitérések esetében ez a Φ függvény értéke adja a C-t, ami körülbelül 2π, míg nagy kitéréseknél egy jóval bonyolultabb kifejezés.

BEVETÉSEN

De lássuk, mi is volt a tényleges tanítás-tanulási folyamat. A dimenzióanalízist, mint módszert, elsősorban a Szirtes Ádám által kidolgozott dimenzióhalmaz [1] fogalmával próbáltam megközelíteni. Ám ez a Szirtes-féle módszer elsősorban egyetemi hallgatók számára lett kifejlesztve, ezért a feladat főleg abban rejlett, hogyan lehetne ezt a középiskolában érthetően interpretálni. A Szirtes által használt nagyon szép és egzakt matematikát fel kellett váltani a már ismert, egyszerű fizikai ismeretek használatával. Egyszerűnek tartott ismereteinket új területeken alkalmazni nem is olyan könnyű, mégis zseniális, hogy ezen összefüggéseinkkel milyen messzi, általunk még fel nem fedezett területekre juthatunk. A feladatok helyes megválasztása ezért nagyon fontos, hiszen a használható matematikai apparátus korlátozott. A továbbiakban szeretnék ezen témák közül párat, az iskolai gyakorlatban általam már alkalmazott formában bemutatni.

a)Pitagorasz-tétel

Az első lépést, érdekes módon, érdemes talán egy egyáltalán nem fizikai problémával kezdeni, pusztán didaktikai okokból. A Pitagorasz-tételt minden tanuló ismeri, a kicsit ügyesebbek akár több bizonyítását is. Kezdésként tehát bizonyítsuk be mi is, pusztán a dimenziók, pusztán a használt fogalmak mértékegységének segítségével ezt a már nagyon jól ismert tételt.

Kezdő lépésként a terület – akár, mint fizikai mennyiség – fontos tulajdonságait kell definiálni. Az egyik ilyen fontos tulajdonság az additivitás. A terület additivitásával a tanulók matematika órán axiómaként találkoztak. A másik fontos tulajdonság, hogy a terület dimenziója hosszúságegység négyzet, azaz a legegyszerűbb esetben négyzetméter, hiszen a területet négyzet esetében $T=a^2$-ként határozzuk meg, ahol az a a hosszúságmérték megválasztásától függő mérőszám. Ami többek között azt is jelenti, hogy ha az oldalakat λ-szorosra növeljük, akkor a terület λ^2-szeresre nő – $T(\lambda a)=\lambda^2\cdot T(a)$. A területnek ez a tulajdonsága nem csak négyzetekre, hanem háromszögekre is igaz, azaz

$$T(\lambda a,\lambda b,\lambda c)=\lambda^2\cdot T(a,b,c).$$

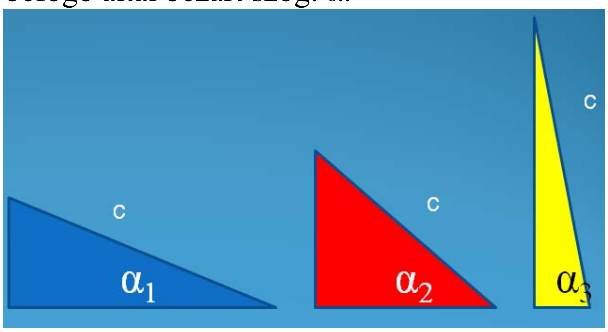
Mivel a λ értékét tetszőlegesen választhatjuk meg, annak értéke egyenlő lehet akár *1/c* érték mérőszámával is, így az előbbi összefüggést átrendezve:

$$(1/\lambda^2)\cdot T(\lambda a,\lambda b,\lambda c)=T(a,b,c).$$

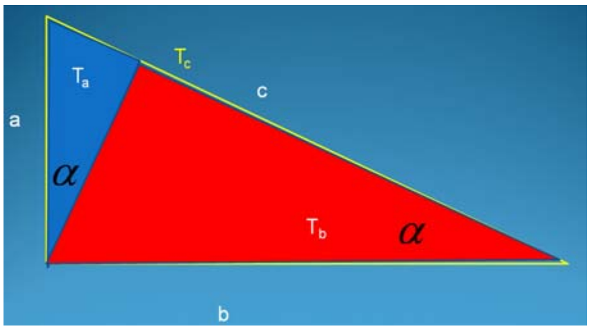
$$c^2\cdot F(a/c,b/c,1)=T(a,b,c).$$

Mivel a *F* függvényben már csak dimenziótlan hányadosok szerepelnek, ezért ez a függvény is dimenziótlan. Így ezzel az átalakítással a területünket felbontottunk egy hosszúság-négyzettől függő és egy dimenziótlan tagra.

A következő lépés a derékszögű háromszög területének meghatározására vonatkozik. E szerint a derékszögű háromszög területe két független paraméter segítségével meghatározható. Ez lehet akár az átfogó hossza, valamint az átfogó és mondjuk a hosszabbik befogó által bezárt szög: α.



1. ábra: a terület függ α szögtől



2. ábra: hasonló háromszögekre bontás

Ennek bizonyítását akár be is mutathatjuk, de az 1. ábra segítségével könnyen és gyorsan szemléltethetjük is. Derékszögű háromszögnél a területet lehet a $T(a,b,c)=c^2 \cdot F(a/c,b/c,1)$ összefüggésből levezetni, ahol $a/c=\sin\alpha$ és $b/c=\cos\alpha$. Azaz:

$$T(a,b,c)=c^2 \cdot F(a/c,b/c,1)=c^2 \cdot F(\sin\alpha,\cos\alpha)=c^2 \cdot f(\alpha)$$

A c átfogójú háromszögben $T_c=T(\alpha,c)=f(\alpha)\cdot c^2$ képletben definiálhatjuk a területet, ahol az $f(\alpha)$ függvény egy dimenziónélküli függvény- hogy mi is ez a függvény, valójában lényegtelen-, T_c dimenziója tehát egyértelműen négyzetméter. A nagy, c átfogójú háromszöget a c-vel szemközti csúcsból induló magasságvonallal bontsuk két egymással és az eredetivel is hasonló háromszögre (2. ábra). Ezek átfogói így persze a és b lesznek. Ugyanígy felírható a T_a és T_b területek értéke is. A hasonlóság a bizonyításban nagyon fontos. Ez biztosítja ugyanis, hogy a terület függvényt szabadon szétbonthassuk dimenzióval rendelkező és dimenziótlan tényezőkre:

$$T_a=f(\alpha)\cdot a^2$$

$$T_b=f(\alpha)\cdot b^2$$

Az $f(\alpha)$ függvény a fentebb bemutatott *hasonlóság* miatt lesz azonos mindhárom háromszög esetében – amely amúgy konkrétan $f(\alpha)=(\sin 2\alpha)/4$. Ez másképp fogalmazva azt jelenti, hogy, csak derékszögű háromszögnél érdemes keresni a Pitagorasz-tétel érvényességét! Innen már csak a terület additivitását kell felhasználni, azaz: $T_a+T_b=T_c$, ami tehát nem más, mint $f(\alpha)\cdot a^2+f(\alpha)\cdot b^2 =f(\alpha)\cdot c^2$. Itt $f(\alpha)$-val egyszerűsítve kapjuk:

$$\boxed{a^2+b^2=c^2.}$$

Rendkívül elegáns, szép és gyors bizonyítást kaptunk, melyet a tanulók nagy örömmel fogadtak. A dimenzió jelentős extra jelentést adott a hosszúságnak és a területnek, mely jelentéssel a mérésükre használt számok önmagukban nem rendelkeznek.

d) Kepler III. törvénye

Egy igazán izgalmas téma, mely törvény bizonyítását nem közlik a középiskolás tankönyvek. A mi bizonyításunk szépsége egy egyszerű erőtörvénynek, és a dimenziókba rejtett jelentésnek köszönhető.

A kezdő kérdés tehát, mitől függ a bolygók keringési ideje? A tanulók által felvetett lehetséges fizikai mennyiségek: a bolygó tömege (M_b), a Nap tömege (M_N), a pálya „mérete" (a) – az ellipszis pálya fél nagytengelyét használjuk, mint lineáris méretet. A dimenziókból egyértelműen látszik, hogy itt valamire még szükség van, hiszen az idő dimenziójával ezen mennyiségek egyike sem rendelkezik. A segítő kérdés arra vonatkozott, hogy vajon milyen erő tartja pályán az adott bolygót. A válasz persze gyorsan jött, hogy a gravitációs erő. A gravitációs erőtörvényben viszont van egy állandó fizikai mennyiség, a gravitációs állandó. További kérdés volt, hogy vajon ennek az értéke befolyásolhatja-e keringési időt. A válasz itt is jött, hogy igen, hiszen ha egy másik világegyetemben lennénk, ahol más ez az érték, más lenne a pályán tartó erő, s így a sebesség és a keringési idő is. A következő mennyiség, ami ráadásul idő dimenzióval is rendelkezik, a gravitációs állandó.

Kérdés még, hogy milyen egyszerű megfontolást tehetünk, hiszen a tömegekre vonatkozó egyenletrendszerünk még nem lenne megoldható. Kihasználjuk még, hogy a bolygóra ható erő $F = m\tilde{a}$, másfelől a bolygóra ható gravitációs erő nagysága is függ annak tömegétől: azaz $F_{gr} = m\tilde{a}$, a gyorsulás, azon keresztül a keringési sebesség illetve keringési idő már független a bolygó tömegétől.

Ezt az eredmény felhasználhatjuk a keringési időre vonatkozó összefüggés felírásában- a≈R, G a gravitációs állandó, melynek mértékegységét az SI alapmennyiségeit felhasználva írtuk fel – C pedig egy mértékegység nélküli állandó, melynek értékéről mérésen vagy analitikus számoláson keresztül kaphatunk információt:

$$T=C\cdot G^{\alpha}\cdot M_N^{\beta}\cdot a^{\gamma} \qquad (1)$$

A mértékegységekre vonatkozó következmény:

$$s = 1\cdot\left(\frac{m^3}{kg\cdot s^2}\right)^{\alpha}\cdot kg^{\beta}\cdot m^{\gamma}$$

Ez, az (1) összefüggésben szereplő dimenziókra – m, s, kg – az alábbi egyenletrendszer eredményezi az egyenlet bal és jobb oldalára nézve:

m: 0=3α+γ; kg: 0=β-α; s: 1=-2α

Ennek megoldása tehát α=-1/2, β=-1/2, γ=3/2, Az egyenletünk tehát:

$$T = C\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{G\cdot M_N}} \qquad (2)$$

Átrendezve kapjuk:

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = C^2\cdot\frac{1}{G\cdot M_N} = \acute{a}lland\acute{o}}$$

hiszen a Nap tömege, egy adott rendszeren belüli állandó paraméter, a gravitációs állandó egyetemes állandó, C (2π) illetve $C^2/(G\cdot M_N) = 2.97472505\times10^{-19}\,\mathrm{s^2m^{-3}}$ érték pedig szintén állandó – mely értéket középiskolás tankönyvben még nem fedeztem fel. A gyerekek rendkívüli figyelemmel és örömmel követték ezt a bizonyítást.

e) Hőmérsékleti sugárzás

A manapság elterjedt középiskolai tankönyvben gyakorlatilag nincsen kvantitatív vizsgálat a hőmérsékleti sugárzás témakörében, pedig nagyon hasznos a jelenség mélyebb vizsgálata.

Ebben a feladatban szándékosan hibázunk egy nagyot, a nagyobb tanulság érdekében! A dimenziók itt is hihetetlenül beszédesek lesznek, még akkor is, ha egy darabig szándékosan nem halljuk őket meg! A feketetest sugárzásának energiasűrűségét (egységnyi térfogatra vonatkoztatott energiát) fogjuk vizsgálni, mert ez a mennyiség a sugárzó test méreteitől már független.

Természetesen a kérdést a kor szellemében először klasszikus fizikai szemlélettel közelítjük meg. Gondoljuk végig, a klasszikus fizikában mi befolyásolja a kisugárzott energia sűrűségét (u)! A tanulók feltevései alapján felvetődött mennyiségek: A test mérete (R), hőmérséklete (T), elektromágneses sugárzás lévén a fénysebesség (c), illetve a hőmérséklet és az energia között kapcsolatot teremtő Boltzmann-állandó (k). Mivel energia sűrűséget vizsgálunk, ezért könnyen belátható, hogy a test méreteitől független mennyiséget vizsgálunk! Ezek után csak fel kell írni az ismert típusú egyenleteket:

$$u=C\cdot k^{\alpha}\cdot T^{\beta}\cdot c^{\gamma} \qquad (3)$$

$$\frac{kg}{ms^2} = 1\cdot\left(\frac{kgm^2}{s^2K}\right)^{\alpha}\cdot K^{\beta}\cdot\left(\frac{m}{s}\right)^{\gamma}$$

Ez, a (3) összefüggésben szereplő dimenziókra – m, s, kg , K – az alábbi egyenletrendszer eredményezi az egyenlet bal és jobb oldalára nézve:

$$kg:\ 1=\alpha;\ m:\ -1=2\alpha+\gamma;\ s:\ -2=-2\alpha-\gamma;\ K:\ 0=-\alpha+\beta$$

Ennek megoldásából: a $\gamma=-3$ *és* $\gamma=0$ egyértelmű ellentmondásra jutunk! Ez a dimenziók nyelvén azt jelenti, hogy ezektől, vagy csak ezektől az mennyiségektől, melyeket jelen esetben feltételeztünk, az energia sűrűség nem függhet!

Az ellentmondás feloldására vezessük be a Planck-állandót (*h*), s nézzük meg, mit eredményez az energia Planck-állandótól való függésének feltételezése:

$$u=C\cdot k^{\alpha}\cdot T^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdot h^{\delta} \tag{4}$$

$$\frac{kg}{ms^2}=1\cdot\left(\frac{kgm^2}{s^2K}\right)^{\alpha}\cdot K^{\beta}\cdot\left(\frac{m}{s}\right)^{\gamma}\cdot\left(\frac{kgm^2}{s}\right)^{\delta}$$

Ez a (4) összefüggésben szereplő dimenziókra – m, s, kg , K – egy könnyen megoldható egyenletrendszert eredményez, melyet a tisztelt olvasó maga is gyorsan megoldhat, aminek eredményeképp az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\boxed{u=C\cdot\frac{k^4}{c^3\cdot h^3}\cdot T^4}$$

Amely összefüggés nem más, mint a Stefan-Boltzmann törvény, amelyben a konstans tényező értéke az irodalom szerint $C=8\pi^2/15$.

TAPASZTALATOK

Röviden, talán azt hangsúlyoznám a dimenzióanalízisről, hogy egyszerű, szinte magától értetődő feltételekből, és abból a nagyon egyszerű elvárásunkból, hogy egy fizikai jelenség felírásakor használt egyenletnél az egyenlet két oldalának dimenziója meg kell egyezzen, hihetetlen, szinte megdöbbentő eredményekre juthatunk. Ebben persze nagy kihívást jelenthet a megfelelő mennyiségek végiggondolása, feltárása, a jelenséget befolyásoló tényezők helyes megválasztása. De ezek végiggondolásában sokat segítenek a dimenziók!

Az elvi hasznon felül azon kellemes gyakorlati haszonnal is rendelkezik a dimenziókkal való gondolkozás, hogy olyan, a tankönyvek [3] [4], esetleg a kerettantervek által a középiskolában csak szimplán közölt tényeket, törvényeket is jobban megérthetik a diákok, melyek részletesebb tárgyalására valószínűleg időhiányában nem kerülhetne sor, így sok esetben elkerülhetőek a kinyilatkoztatás jellegű tanítási szituációk. Továbbá olyan nemlineáris jelenségeket vizsgálhatunk, melyeket nem is lehetne klasszikus matematikai úton a középiskolában tárgyalni.

A szakirodalom [1] [2] foglalkozik természetesen klasszikus, a fizika órákról is jól ismert témákkal, de elsősorban mérnöki megközelítésből. Érdekes, hogy az általuk a dimenzióanalízis segítségével tárgyalt témák között sok biológiai vonatkozású probléma is felvetődik. Ezt, a témákban és szemléletben rejlő sokszínűséget én is próbáltam az órákra becsempészni. A tanulók nagyon pozitívan fogadták a nem teljesen megszokott témákat. A mérnöki és biológia tudományok irányában is érdeklődő diákok rendkívüli érdeklődést mutattak, az inkább fizika iránt érdeklődőek pedig kifejezetten élvezték, hogy ilyen témákban is a fizika ad megoldást sok kérdésre.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Szirtes Ádám: Dimenzióanalízis és alkalmazott modellelmélet, Typotex k., Budapest, 2006
2. Thomas A. McMahon, John Tyler Bonner: Form und Leben, Spektrum der Wissenschaft mbH Co.,Heidelberg, 1985
3. dr. Halász Tibor, dr. Jurisits József: Fizika 11-12, Mozaik kiadó, Szeged, 2004
4. Gulyás János, Honyek Gyula, Markovits Tibor, Szalóki Dezső, Tomcsányi Péter, Varga Antal: Fizika 11., Műszaki kiadó, Budapest, 2007

SZERZŐ

Hömöstrei Mihály
ELTE TTK, Fizika Intézet, Fizika tanítása ph.D. doktorandusz
Német Nemzetiségi Gimnázium, Budapest. e-mail: hmisko83@hotmail.com