AZ ÉGIG ÉRŐ PASZULY

JACK AND THE BEANSTALK

Honyek Gyula
ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola

ÖSSZEFOGLALÁS

Csodálkoznunk kellene, ha a Föld valamely pontján meglátnánk egy kötelet, amelynek az alja majdnem leér a talajra, a teteje meg elveszik a felhőkben, mint az égig érő paszuly Benedek Elek meséjében? Lehetne liftet működtetni a paszuly végén lévő űrállomás és a Föld felszíne között? Miből kellene elkészíteni azt a kábelt, amely bírná a terhelést? Mi lenne, ha ezt a kötelet jól megrángatnánk, aztán várnánk a visszaérkező jelre? Ez a cikk ezekre a kérdésekre keresi a választ.

ABSTRACT

Should we have to be wondering if we saw a rope somewhere on the Earth touching almost the surface by its one end whilst the other end of the rope is far away in the sky as it happened in the famous English fairy tale "Jack and the Beanstalk"? Is it possible to build a space elevator between the surface of the Earth and a space station? What would be the material of the space elevator cable which could sustain the extremely large load? This paper is seeking the answers for these questions.

KULCSSZAVAK/KEYWORDS
Geostacionárius pálya, űrlift, szén nanocső
Geostationary orbit, space elevator, carbon nanotube.

BEVEZETÉS

A Földdel együtt mozgó műholdakkal kapcsolatban megkülönböztetjük az úgynevezett geoszinkron, illetve a geostacionárius (GEO) pályákon mozgó űrobjektumokat. A geoszinkron pályán mozgó műholdak keringési ideje megegyezik a Föld sziderikus forgási idejével, ami 23 óra, 56 perc, 4,1 s = 86 164,1 s. (Mivel a Föld a tengely körüli forgása mellett a Nap körül is kering, ezért két delelés között ennél valamivel több idő, éppen 24 óra telik el, amit szinodikus periódusidőnek nevezünk.) Az egyik nevezetes geoszinkron pálya a Tundra-pálya, aminek Földre levetített vetületét az *1. ábra* mutatja. Ezek a pályák általában elnyújtott ellipszis alakúak, aminek az előnye az, hogy mozgásuk során a Föld bizonyos pontjai felett hosszabb ideig lényegében egy helyben tartózkodnak.

1. ábra. Geoszinkron Tundra-pálya.

A geostacionárius pályán lévő műholdak a geoszinkron műholdak speciális esetének tekinthetők, mert ezek nemcsak a Földdel megegyező keringési idejűek, hanem lényegében állandóan a Föld ugyanazon pontja felett „állnak”. Ezek a műholdak kizárólag az Egyenlítő síkjában helyezhetőek pályára, meghatározott magasságban, vagyis számukra egy képzeletbeli kör alakú gyűrű létezik a Föld körül, és a műholdakat ide kell vezetni meghatározott sebességgel. Jelenleg nagyjából 400 geostacionárius műhold kering a Földdel együtt ezen a körgyűrűn.

A GEOSTACIONÁRIUS PÁLYA ADATAINAK KISZÁMÍTÁSA

Középiskolás módszerekkel könnyen kiszámíthatjuk a geostacionárius pálya adatait. Tegyük egyenlővé a műholdra ható gravitációs erőt a centripetális erővel, vagyis írjuk fel a műhold mozgásegyenletét a geostacionárius körpályára, majd fejezzük ki a pálya sugarát:

$$\gamma \frac{mM}{r_{geo}^2} = m r_{geo} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

$$r_{geo} = \sqrt[3]{\gamma M \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2} = 42\,164\ \text{km} = 6{,}61\,R = \text{tengerszint} + 35\,786\ \text{km}.$$

A kerület és a keringési idő hányadosaként számíthatjuk ki a geostacionárius pályán mozgó műhold sebességét:

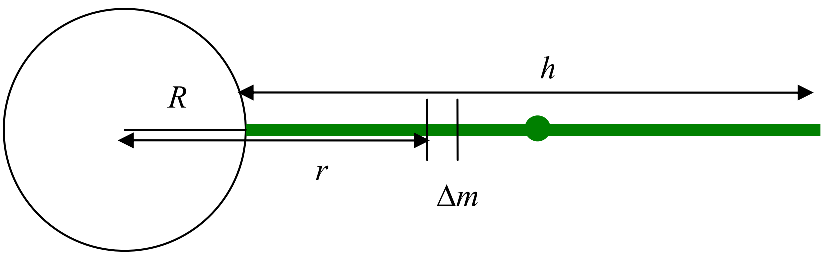
$$v = \frac{2r\pi}{T} = 3{,}0746\,\frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

GEOSTACIONÁRIUS KÖTÉL ADATAINAK KISZÁMÍTÁSA

Az előzőekben a műholdat tömegpontnak tekinthettük, vagyis a kiterjedésével nem kellett számolnunk. A következőkben határozzuk meg (a mindezideig csak képzeletünkben létező) geostacionárius kötél (égig érő paszuly) pályaadatait. Könnyen beláthatjuk, hogy a kötél is az egyenlítő síkjában mozoghat csak. Tegyük fel, hogy a kötél sugárirányú, a Föld felszínéről indul az ég felé, homogén anyagú, egyenletes, állandó keresztmetszetű.

A *2. ábrán* feltüntettük a kötél egy kicsiny Δm darabját, amire könnyen felírhatjuk a gravitációs erőt:

$$\Delta F = \gamma \frac{\Delta m M}{r^2} = \gamma \frac{M}{r^2} \cdot \frac{m}{h} \Delta r.$$



2. ábra. Az égig érő kötél elhelyezkedése a kötél tömegközéppontjának feltüntetésével.

A h hosszúságú teljes kötélre ható gravitációs erőt integrálszámítással (vagy a Coulomb-törvény és a Coulomb potenciál közötti analógia alapján) határozhatjuk meg. A teljes gravitációs erőt egyenlővé kell tennünk azzal a centripetális erővel, amit úgy képzelhetünk el, hogy a kötél teljes tömege a tömegközéppontjában lenne összesűrítve:

$$F=\gamma\frac{mM}{h}\int_R^{R+h}\frac{dr}{r^2}=\gamma\frac{mM}{h}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\gamma\frac{mM}{R(R+h)}=m\left(R+\frac{h}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\frac{\gamma M}{R}\cdot\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2=(R+h)\left(R+\frac{h}{2}\right).$$

Vegyük észre, hogy a fenti számítás második sorában lévő egyenletet érdemes a Föld R sugarának négyzetével leosztanunk, mert így az egyenlet bal oldala egy dimenziótlan szám lesz, a jobb oldalon pedig a kötél h hosszúsága helyett a kötél dimenziótlan $x=\frac{h}{R}$ relatív hosszúsága jelenik meg ismeretlenként. Másodfokú egyenletre jutunk, melyet könnyen megoldhatunk:

$$\frac{\gamma M}{R^3}\cdot\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2=\left(1+\frac{h}{R}\right)\left(1+\frac{h}{2R}\right)$$

$$6{,}61^3\approx 290=(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

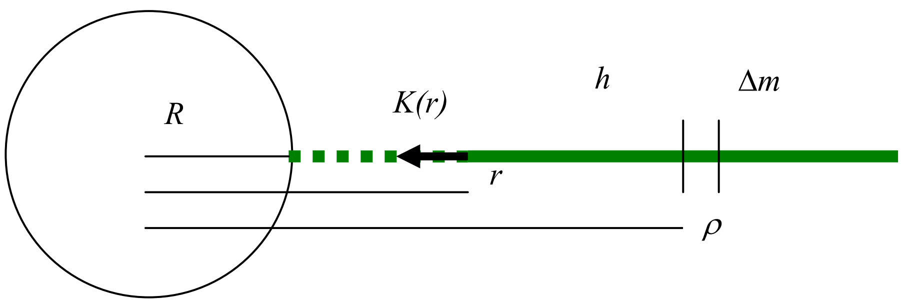
$$x=\frac{h}{R}\approx 22{,}6$$

$$h=144\,200\text{ km}.$$

Meglepően nagy értéket kapunk; az égig érő paszuly hosszúsága a geostacionárius műholdak magasságának több mint négyszerese, vagyis a homogén kötél tömegközéppontja is több mint kétszer magasabban kering a GEO műholdak magasságánál.

MEKKORA ERŐ FESZÍTI A PASZULYT?

Az égig érő kötelet a két végének kivételével feszítőerő terheli, ami az inhomogén gravitációs tér árapálykeltő hatása alapján érthető meg a legkönnyebben. A kötél alsó részén (a GEO pálya alatt) a gravitációs erők a gyorsuláshoz szükségesnél nagyobbak, míg a kötél felső részét (a GEO pálya felett) a szükségesnél kisebb gravitációs erők húzzák, hiszen a kötél egyes darabjainak gyorsulását egyszerűen az $\omega^2 r$ összefüggés határozza meg, ahol ω a Föld szögsebessége. A kötél hossza mentén a *K(r)* feszítőerőt úgy határozhatjuk meg, ha képzeletben elvágjuk a kötelet (*3. ábra*), és egyik darabjának mozgását az egész kötél mozgásához hasonlóan (lásd a fenti részt) számítjuk ki, és a vágás hatását az ottani feszítőerővel vesszük figyelembe:



3. ábra. A kötélben fellépő feszítőerő kiszámításának elvi vázlata.

$$\int_{r}^{R+h} \frac{\gamma M}{\rho^2} dm + K(r) = \frac{R+h-r}{h} m \cdot \left(r + \frac{R+h-r}{2} \right) \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 .$$

Az integrálás elvégzése után érdemes az egyenletben lévő állandók numerikus értékét behelyettesíteni, és újra bevezetni a dimenziótlan $x = \frac{r}{R}$ relatív hosszúságot. A számítások elvégzése után a következő eredményre jutunk:

$$K(r) = m \cdot \left(7{,}5 \cdot 10^{-4} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \right) \cdot (23{,}6 - x) \left(23{,}6 + x - \frac{24{,}6}{x} \right)$$

$$x = \frac{r}{R}$$

$$h = 22{,}6R$$

$$h + R = 23{,}6R.$$

A fenti összefüggéséből leolvashatjuk, hogy a *K(r)* feszítőerő csak a helytől és a kötél *m* teljes tömegétől függ. Egyszerű behelyettesítéssel beláthatjuk, hogy a feszítőerő nulla a kötél két végén, vagyis az $x = 1$ és az $x = 23{,}6$ helyzetben. Megállapíthatjuk, hogy a feszítőerő maximuma éppen a geostacionárius pálya helyén van:

$$K_{\max} = K(r = 6{,}61\, R) = m \left(0{,}3375 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \right).$$

Nem véletlen egyezés ez, hanem annak a következménye, hogy a GEO pálya alatt a szükségesnél nagyobb, felette pedig kisebb a gravitációs erő a köteldarabok számára szükséges gyorsulásnál, tehát az „árapály" erők éppen a GEO pálya helyén a legnagyobbak. Ugyanezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a geostacionárius kötél tömegközéppontja és súlypontja durván nem esik egybe. A kötél tömegközéppontja a közepén, míg súlypontja a geostacionárius pálya helyén van, melyek távolsága kissé nagyobb, mint a kötél hosszának negyede.

VAN-E OLYAN ANYAG, AMIBŐL ELKÉSZÍTHETŐ A PASZULY?

Könnyen kiszámíthatjuk, hogy mekkora maximális mechanikai feszültséget kell a paszulynak kibírnia. Írjuk fel a kötél tömegét az anyagának sűrűsége segítségével ($m = \rho V = \rho A h$). A maximális mechanikai feszültség tehát így adható meg:

$$A = \frac{m}{\rho h}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{K_{\max}}{A} = \frac{m \left(0{,}3375 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \right)}{\frac{m}{\rho h}} = \rho h \left(0{,}3375 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \right).$$

Észrevehetjük, hogy a maximális mechanikai feszültség csak a kötél hosszától és az anyagának a sűrűségétől függ. A kötél hosszát ismerjük ($h = 1{,}442 \cdot 10^8$ m), tehát a maximális feszültség csak az anyagsűrűségtől függ. Mai ismereteink szerint a legesélyesebb kötél anyag szén nanocsövekből készülne. Az egyfalú szén nanocsövek anyagának sűrűsége 2266 kg/m^3, amit a fenti összefüggésbe helyettesítve $\sigma_{\max}$ = 110 GPa értéket kapunk. A szén nanocsövek szakítószilárdságát 50 GPa értékűnek tartják, tehát még ebből az anyagból sem lehetne elkészíteni a paszulyt.

Horváth Gábor érdekes cikkében [1] megmutatja, hogy mégis elkészíthető szén nanocsövekből a kötél, ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy a kötél állandó keresztmetszetű legyen. Ha a kötél keresztmetszetét úgy változtatjuk, hogy a benne ébredő feszültség mindenhol ugyanakkora legyen, akkor elérhetjük, hogy a szén nanocsövek kibírják a szükséges terhelést. Ilyen esetben persze a GEO pálya helyén lesz a kötél maximális keresztmetszetű, amit Horváth Gábor részletesen levezet [1]. Jelenleg azonban gondot jelent, hogy szén nanocsövekből közel sem tudunk százezer kilométeres hosszúságot elérni, hiszen manapság még a hosszúság határ a milliméter ezredrészénél tart.

JELTERJEDÉS A KÖTÉLBEN

Számítsuk ki, hogy mennyi idő múlva érkezne vissza a jel, ha megráznánk a kötél végét a Föld felszínén. Tegyük fel, hogy transzverzális lökéshullámot indítunk el, melynek terjedési sebessége a kötélben lévő feszítőerőtől és a kötél egységnyi hosszának tömegétől függ:

$$v = \sqrt{\frac{K(r)}{m/h}}.$$

Ha ebbe az összefüggésbe beírjuk a feszítőerő helyfüggését kifejező formulát, akkor talán meglepődve vesszük észre, hogy a kötélbeli terjedési sebesség csak a helytől függ, nem függ a kötél anyagától. A geostacionárius pálya helyén kapjuk a jelsebesség maximumát:

$$v = \sqrt{\frac{K(r)}{m/h}} = \sqrt{\frac{m\left(7{,}5\cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(23{,}6-x)\left(23{,}6+x-\frac{24{,}6}{x}\right)}{\frac{m}{144\,200\ \mathrm{km}}}} = 330\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{(23{,}6-x)\left(23{,}6+x-\frac{24{,}6}{x}\right)}$$

$$v_{\max} = 7000\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ha tudjuk, hogy helyről helyre mekkora a terjedési sebesség a kötélben, akkor viszonylag könnyen ki tudjuk számítani azt is, mennyi idő múlva érkezik vissza a kötél égben lévő végéről visszaverődött jel:

$$v = \frac{dr}{dt} = R\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dt = R\frac{dx}{v} \quad \Rightarrow \quad T_{fel-le} = 2R\int_1^{23{,}6}\frac{dx}{v}$$

$$T_{fel-le} = \left(3{,}87\cdot 10^4\ \mathrm{s}\right)\int_1^{23{,}6}\frac{dx}{\sqrt{(23{,}6-x)\left(23{,}6+x-\frac{24{,}6}{x}\right)}}$$

$$T_{fel-le} = 6{,}2\cdot 10^4\ \mathrm{s} \approx 17\ \text{óra}.$$

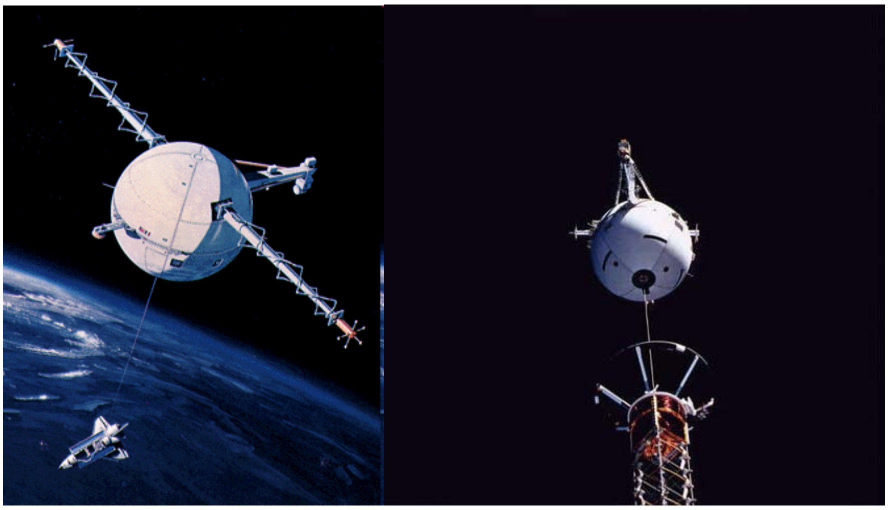
Ez tehát azt jelenti, hogy akárhol is találnánk az Egyenlítő mentén egy egyenletes keresztmetszetű, égig érő kötelet vagy paszulyt, akkor az alját jól megrázva, a jel 17 óra múlva érkezne vissza hozzánk, akármilyen anyagból is készülne a kötél, feltéve, hogy a kötél égben lévő vége szabad lenne, nem lakna fenn semmilyen óriás.

VALÓSÁG VAGY ÁBRÁND?

Ciolkovszkij már 1895-ben felvetette egy égi kastély ötletét, ahova liften lehetne felmenni. A szén nanocsövekre hivatkozva Bradley C. Edwards [2], [3] félmillió dollárt kapott az űrlifttel kapcsolatos kutatásaira. Jelenleg úgy becsülik, hogy az űrliften a szállítási költségek a jelenlegi űrrepülőgépes megoldáshoz képest a század részére csökkennének, míg a kutatási-fejlesztési költségeket tíz milliárd dollárnál is többre tartják. Nemcsak a Föld körüli geostacionárius pályán keringő űrállomásokra tervezik az űrliftet, hanem a sokkal kisebb gravitációval bíró Hold körüli űreszközök ellátására is. A *4. ábra* egy űrlift fantáziaképét mutatja.

4. ábra. Űrlift fantáziaképe.

Láthatjuk, hogy az űrlift egyelőre csak távlati terv, azonban a kipányvázott műholdak (tethered satellites) már kísérleti fázisban vannak. A NASA és az olasz ISA kifejlesztett egy 1,6 m átmérőjű űrszondát, melyet a Columbia űrrepülőgép vitt magával 1996 februárjában (*5. ábra*). Amikor a Columbia 90 km-es magasságban stabil pályára állt, elkezdték a szondát a Földdel ellentétes irányba kiengedni. Azt tervezték, hogy a szonda távolodjon el az űrrepülőgéptől 21 km-re, de amikor az összekötő kábel elérte a 19,7 km-t, a kábel elszakadt, és a szonda odaveszett. A kísérlet célja az volt, hogy megvizsgálják, lehet-e a Föld dinamóval elektromos energiát termelni az űrállomások számára? Hát, ami azt illeti, a fenti kísérletben a szakadás előtt a kábelben 3500 V feszültség és 0,5 A áram jött létre, ami majdnem 2 kW!



5. ábra. Kipányvázott műholdak fantáziaképe (balra) és valódi képe (jobbra).

IRODALOMJEGYZÉK

1. Horváth Gábor: Fizikai Szemle, 6., 229, 2008.
2. Bradley C. Edwards and Eric A. Westling: The Space Elevator: A Revolutionary Earth-to-Space Transportation System, Spageo Inc., San Francisco CA USA, 2003.
3. Bradley C. Edwards and Philip Ragan: Leaving the Planet by Space Elevator, Lulu.come, Seattle WA USA, 2006.

SZERZŐ

Honyek Gyula, vezetőtanár, ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola, honyek@gmail.com.