

## NUMERIKUS MÓDSZEREK A DIÁKKÖRI MUNKÁBAN

### NUMERICAL METHODS IN A HIGH SCHOOL WORKSHOP

**Jaloveczki József**

Szent László Általános Művelődési Központ Gimnáziuma, Baja

#### ÖSSZEFOGLALÁS

*Középiskolában diákkörös foglalkozásokon fizikai jelenségek leírására 1999 óta alkalmazunk matematikai modelleket, szimulációkat. Ismertetem az általunk használt 3 numerikus módszer lényegét, konkrét fizikai példákkal. A szemléltető programokat egy diákkörös tanuló írta. Az első példa ejtőernyős mozgása közegellenállással. A mozgásegyenlet megoldását Euler-módszerrel és analitikusan is elvégeztük. Az asztról lecsúszó lánc mozgása súrlódással analitikusan már bonyolultabb, leírásában Euler és Feynman módszerét hasonlítottuk össze. A fizikai inga mozgását 4-ed rendű Runge-Kutta módszerrel ábrázoltuk csak úgy, mint Lorenz híres pillangó effektusának attraktorát.*

#### ABSTRACT

*In our high school workshop we have been studying different phenomena in physics since 1999 applying mathematics and simulations to characterise them. I'll introduce our three numerical methods in practical physics examples. The computer programs have been developed by a student of mine. The equation of the falling parachute has been worked out both analytically and numerically. The sliding chain from a horizontal surface is a more complicated analytical problem for the friction. We applied Euler's and Feynman's methods and compared their graphs. We displayed the trajectory of the physical pendulum with the fourth order Runge-Kutta method as well as with the well-known 'Butterfly Effect' of Lorenz.*

#### KULCSSZAVAK/KEYWORDS

Numerikus,módszerek,mozgásegyenlet

Numerical, methods, equation

#### DIÁKKÖRÜNK

Diákkörünk 1999-ben alakult a bajai Szent László ÁMK-ban, Mandelbrot Tudományos Diákkör néven. Első terveink közé tartozott a fraktálok megismerése. Később a program kibővült a fizikai jelenségek számítógépes modellezésével. Elsősorban a természettudományokat, matematikát, számítógépes programozást kedvelő tanulók jelentkeznek. Hetente 2 óra rendszeres munka, ami gyakran otthon folytatódik. A diákkör létszáma változó egy tanévben átlagosan 7-10 fő. A végzett diákköröseink nagy része műszaki, tudományos pályát választ.

#### MIÉRT HASZNÁLUNK NUMERIKUS MÓDSZEREKET?

A középiskolában tanult természettudományos tárgyak, köztük elsősorban a fizika gyakran használ differenciálegyenleteket a mozgások, jelenségek időbeli változásának leírására. Ha valós problémákkal szeretnénk szakkörön, diákkörön foglalkozni, akkor az elméleti leírás, de főleg annak egzakt megoldása meghaladja a középiskolában elsajátítható matematikát. Még a

matematikában jeleskedő tanulók sem jutnak tovább a néhány egyszerű, szeparálható közönséges differenciálegyenlet analitikus megoldásánál. A differenciál-és integrálszámítás alapjainak elsajátítása után a felsőbb éves érdeklődő diákok elegendő matematikai- és informatikai tudással bírnak ahhoz, hogy néhány numerikus módszer alkalmazásával oldjanak meg a valós életből vett természettudományos problémát. A kapott eredményeket, grafikonokat célszerű összevetni a tényleges megfigyeléssel, méréssel kapott adatokkal.

### MILYEN MÓDSZEREKET HASZNÁLUNK?

Közönséges, első-és másodrendű lineáris (időnként nemlineáris) differenciálegyenletek megoldására különféle numerikus módszerek léteznek. A diákkörön ezek közül három módszert alkalmazunk.

### EULER-MÓDSZER

Ismerve az  $y_n$  értékét az  $x_n$  pontban (vagy  $t_n$  pillanatban), keressük az  $y_{n+1}$  értékét az  $x_{n+1} = x_n + h$  pontban (vagy  $t_{n+1} = t_n + dt$  pillanatban), ahol  $h$  illetve  $dt$  ismert. Mivel a mechanikai problémák többségénél valamely jellemző (út, sebesség stb.) időbeli alakulását szeretnénk vizsgálni, a továbbiakban az időbeli változásokkal írjuk le a módszereket.

Legegyszerűbb megoldásnak a Taylor sorfejtést választhatjuk és  $y_{n+1}$ -et sorba fejtjük a  $t_n$  pillanat körül és az első két tagot tekintjük:

$$y_{n+1} = y(t_n + dt) = y(t_n) + dt \cdot \dot{y}(t_n) + dt^2 \frac{\ddot{y}(t_n)}{2} + \dots \quad (1)$$

$$y_{n+1} - y_n = \Delta_{n+1} = dt \cdot \dot{y} + O(dt^2) \quad (2)$$

ahol  $O(dt^m)$  olyan hibatagot jelent, mely  $dt$ -ben  $m$ -ed rendű.

Megállapodás szerint  $m$ -rendűnek nevezzük a módszert, amennyiben a hiba tag  $O(dt^{m+1})$  típusú. Ennek értelmében az Euler módszer elsőrendű. Az egy lépésben elkövetett hiba  $dt^2$  rendű. Így az időbeli változásokat leíró mennyiségre kapott rekurzív formula:

$$\begin{aligned} y_0 &:= y(t = 0) \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + dt \cdot \ddot{y}(t_n, \dot{y}_n) \\ y_{n+1} &:= y_n + dt \cdot \dot{y}(t_n, y_n) \end{aligned} \quad (3)$$

**Példa :** ejtőernyős mozgása a gravitációs erő és a sebességgel arányos fékező erő hatására:

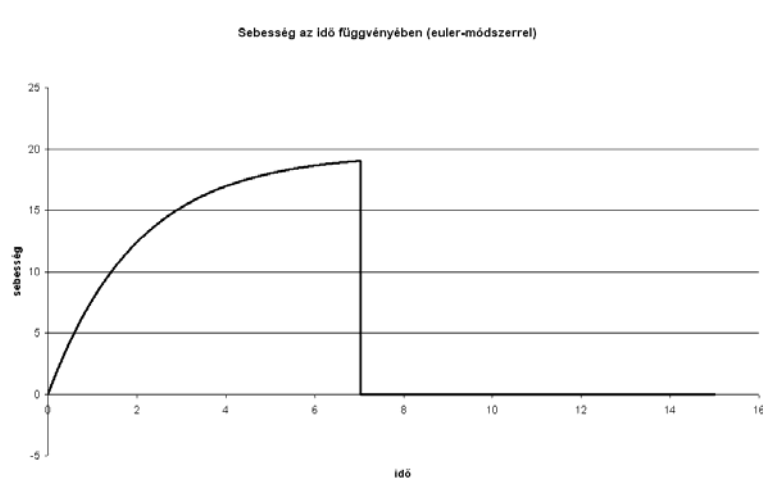
$$\Sigma F = m \cdot a = F_{grav} - F_{fék} \quad (4)$$

$$a = \ddot{y} = g - \frac{c}{m} \dot{y} \quad (5)$$

Analitikus megoldás  $\dot{y}$ -ra, vagyis az ejtőernyős sebességére:

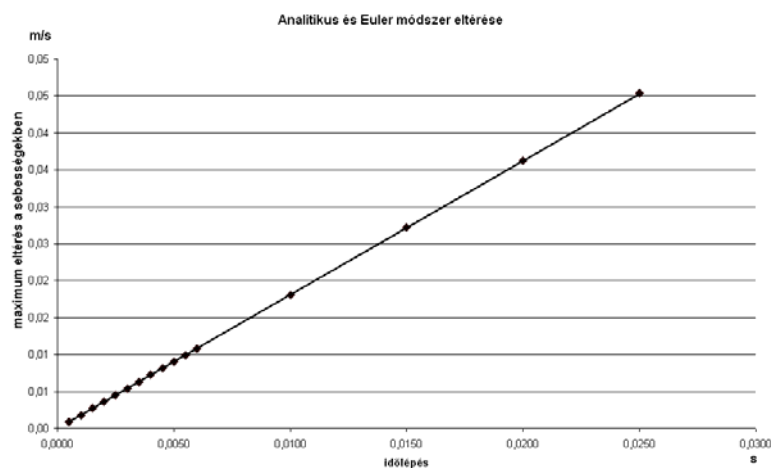
$$v(t) = \dot{y} = \frac{mg}{c} \left( 1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) \quad (6)$$

A megfelelő paraméterek  $(c, m)$  és a kezdeti feltétel megadásával a sebesség Euler módszerrel és analitikusan is ábrázolható. Euler módszerrel (3) szerint ábrázolva (1.ábra), ha a paraméterek  $c = 0,5; m = 1; y(t = 0) = 100; \dot{y}(t = 0) = 0$  SI egységben :



1. ábra : ejtőernyős sebessége Euler -módszerrel,  $dt = 0,0005s$

Mivel az analitikus módon kapott sebesség az adott paraméterek mellett csak kevéssé tér el az Euler-módszerrel ábrázolt görbétől, feltűntettük, hogyan változik a két módon kapott sebességek maximális eltérése az időlépés növekedésével (2. ábra).



2. ábra: az „ejtőernyős” sebességének maximális eltérése az analitikus megoldás és az Euler-módszerrel történt számolás között, az időköz növelésével

### FEYNMAN MÓDSZERE (MÓDOSÍTOTT EULER-MÓDSZER)

Az Euler-módszerben a test mozgását úgy írjuk le, hogy az új helykoordináta a régiek és a sebesség  $dt$ -szeresének az összege. A sebességet az intervallum elején lévő értéknél állandónak vettük. Ehhez képest pontosabb a módszer, ha az intervallum közepén vett értékkel, azaz az időközre vett átlagsebességgel számolunk [1].

$$x(t + dt) = x(t) + dt \cdot \dot{x}(t + dt / 2)$$

$$\dot{x}(t + dt / 2) = \dot{x}(t - dt / 2) + dt \cdot \ddot{x}(t) \quad (7)$$

A számolás első és utolsó lépéseként Euler módszerét alkalmazzuk.

**Példa** : Lánc lecsúszása vízszintes asztról [2]

Egy sima vízszintes asztról  $l$  hosszú lánc csúszik le. A mozgás kezdetekor a láncnak már  $x$  hosszú része csúszott le az asztról. A láncre minden időpontban az asztról addig a

pillanatig lecsúszott  $x$  hosszúságú láncdarab súlyával egyenlő  $F$  erő hat. Ha az egész lánc súlya  $G$ , a következő arányt kapjuk:

$$\frac{F}{G} = \frac{x}{l} \quad (8)$$

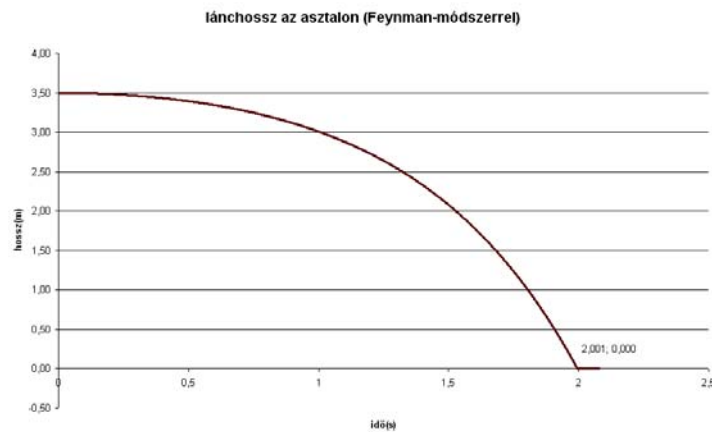
Ezen kívül hat az asztallal való súrlódási erő, ami az asztalon lévő rész súlyával arányos:

$$F_s = k \cdot \frac{mg}{l} \cdot (l - x) \quad (9)$$

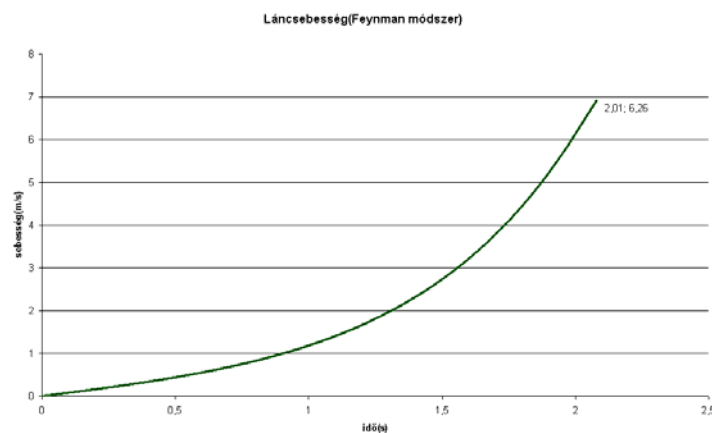
Newton II. törvényével állandó együtthatós, másodrendű (lineáris) differenciálegyenletet kapunk (8) és (9) alapján:

$$\ddot{x} - \frac{g}{l}(1+k)x + g \cdot k = 0 \quad (10)$$

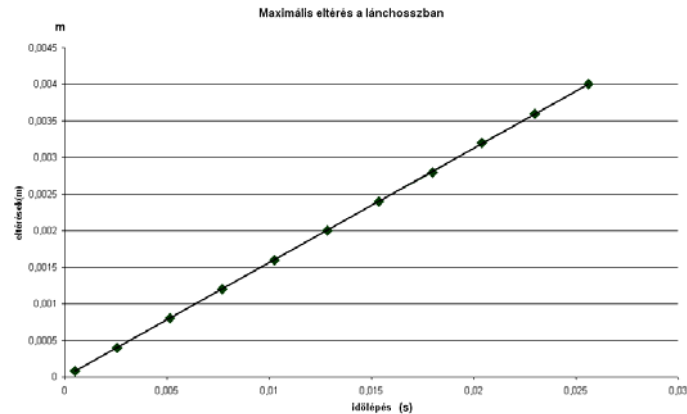
A (10) mozgásegyenletet megoldottuk Euler (3) és a Feynman (módosított Euler) módszer (7) szerint is. A lánc asztalon lévő hosszának változását a 3. ábrán, a lecsúzás sebességének időbeli alakulását a 4. ábrán láthatjuk Feynman módszerével számolva. A két módszer közötti különbség az alkalmazott  $dt$  időlépésnél nem feltűnő, ezért az 5. ábrán ábrázoltuk a növekvő időlépéssel alakuló eltérésüket.



3. ábra: lánc hossz az asztalon ( $dt=0,000065s$ ;  $k=0,05$ ;  $l=4m$ ;  $x=0,5m$ )



4. ábra: a lecsúzás sebessége ( $dt=0,000065s$ ;  $v_0=0m/s$ ;  $k=0,05$ ;  $x=0,5m$ )



5. ábra : az asztalon lévő lánchosszra kapott maximális eltérések alakulása az intervallum növelésével Euler - és a módosított Euler (Feynman) módszerek között

### NEGYEDRENDŰ RUNGE-KUTTA-MÓDSZER

Az eljárás lényege segédváltozókkal:

$$k_1 \equiv dt \cdot f(t_n, y_n)$$

$$k_2 \equiv dt \cdot f\left(t_n + \frac{dt}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 \equiv dt \cdot f\left(t_n + \frac{dt}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

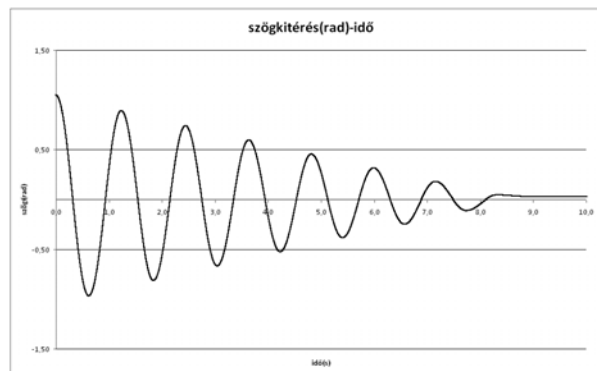
$$k_4 \equiv dt \cdot f(t_n + dt, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (11)$$

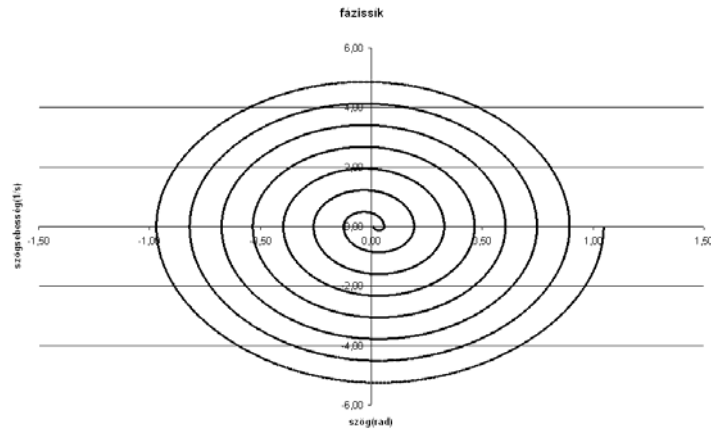
Az egy lépésben elkövetett hiba  $dt^5$  rendű.[3]. Egy N-ed rendű eljárásban a hiba közelítőleg  $dt^{N+1}$ . A hibák időben halmozódnak, de ez a halmozódás nem feltétlenül lineáris. A Taylor-sorfejtés véges számú taggal való közelítéséből adódó hiba mellett egy másik hibaforrás a kerekítési, számábrázolási hiba. Ennek teljes járuléka nő a lépések számával, ezért a  $dt$  időlépést túlságosan kicsinek sem érdemes választani.[4]

**Példa :** fizikai (rúd) inga, a szögsebességgel arányos súrlódással. A (11) eljárásban szereplő  $y$  vektor komponensei a szög, szögsebesség és szöggyorsulások. A mozgásegyenlet:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{l} \sin \varphi - k \cdot \dot{\varphi} \quad (12)$$

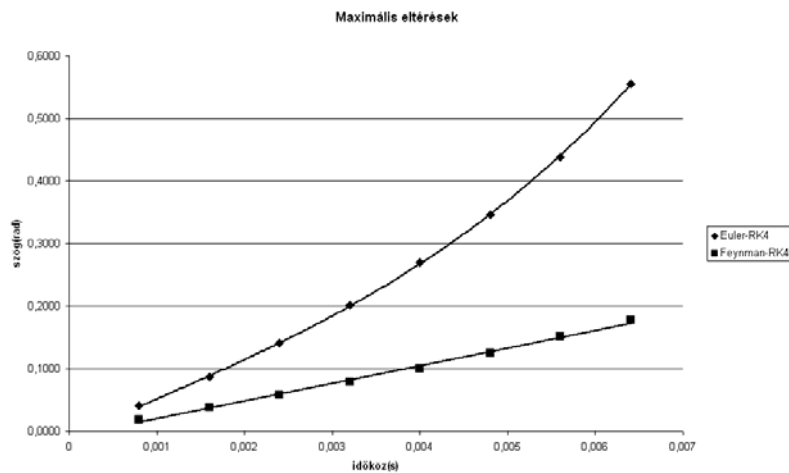


6. ábra: az inga szögkitérése RK4 módszerrel ( $l=1m$ ;  $\varphi_0=60^0$ ;  $k=1$ ;  $dt=0,0008s$ )



7. ábra: a fizikai inga fázissíkja ( $l=1m$ ;  $\varphi_0=60^0$ ;  $k=1$ ;  $dt=0,0008s$ )

Összehasonlítottuk a három módszerrel kapott szögkitéréseket különböző növekvő időközszel, ugyanolyan paraméterek és kezdeti feltételek esetén (8.ábra).



8. ábra: a különböző módszerek maximális eltérése növekvő lépésköz szerint ábrázolva

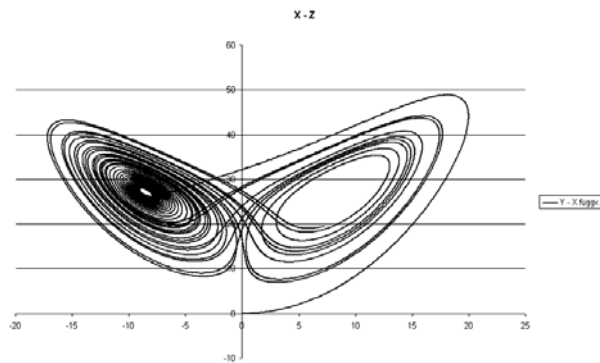
### ÉRDEKESÉG: LORENZ-ATTRAKTOR

Edward Lorenz amerikai meteorológus 1963-ban fedezte fel, hogy az azóta róla elnevezett

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma \cdot (y - x) \\ \dot{y} &= r \cdot x - y - x \cdot z \\ \dot{z} &= -b \cdot z + x \cdot y \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

léggöri modellben ,az  $r = 28$ ;  $\sigma = 10$ ;  $b = 8/3$  paraméterek mellett, apró kezdeti különbségek esetén is az eltérés az idő exponenciális függvényeként növekszik, és ez a gyors hibanövekedés hiúsít meg minden előrejelzést..

Itt a (11)-ben szereplő  $y$  vektor komponenseit rendre az  $x,y,z$  változókkal helyettesítettük és a kapott egyik ( $x-z$ ) síkbeli attraktort ábrázoltuk (9.ábra)



9. ábra: Lorenz modelljének lepkeszárnyakra emlékeztető attraktora

Ez volt az első példa az előrejelezhetetlenség megjelenésére kis szabadságfokú autonóm rendszerben. A Lorenz-modell azóta a folytonos idejű kaotikus rendszerek alappéldája lett. (Pillangóhatás).[5]

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönettel tartozom Eichhardt Iván Mandelbrot diákkörös tanulónak, aki a numerikus szimulációkat készítette. Köszönöm témavezetőm, Dr. Tél Tamás (ELTE, Elméleti Fizika Tanszék) professzor úr hasznos tanácsait, útmutatásait.

### IRODALOMJEGYZÉK

1. Richard P.Feynman: Mai Fizika (1., 116.o.)Műszaki kiadó Bp.,1969.
2. K.K.Ponomarjov: Differenciálegyenletek felállítása és megoldása (115.o.), Tankönyvkiadó, Bp.,1981.
3. Tél T-Gruiz M: Kaotikus dinamika, (291.o.)Nemzeti Tankönyvkiadó,Bp. 2002.
4. Tél T-Gruiz M:Kaotikus dinamika, (293.o) NTK 2002.
5. Tél T-Gruiz M:Kaotikus dinamika, (232.o) NTK 2002.

### SZERZŐ

Jaloveczki József, fizika tanár, Szent László ÁMK, Baja  
Cím: 6500 Baja, Katona J.u.3. Bács-Kiskun megye; PhD-hallgató ELTE TTK, Fizika Tanítása Doktori Iskola; e-mail cím: jalo@freemail.hu