

NEMLINEÁRIS REZGÉSEK A KÖZÉPISKOLAI OKTATÁSBAN

TEACHING NON-LINEAR OSCILLATIONS IN SECONDARY SCHOOL

Kiss József

Than Károly Ökoiskola

ÖSSZEFOGLALÁS

Kilencedik évfolyamos gimnazista osztályban tartottam kísérleti órákat az anharmonikus rezgés és rezonancia jelenségei témakörében, a harmonikus rezgőmozgás folytatásaként. A diákok aktívan bekapcsolódhattak a numerikusan generált adatok leolvasásába, a szabályszerűségek igazolásába, majd az anharmonikus rezgésnél megpróbálhatták megjósolni, hogy milyen változások következnek be a nemlineáris tag figyelembe vétele esetén. A megszokott iskolai sablonoktól való eltérés, a projektoros bemutatás alkalmas volt a tanulók természetes kíváncsiságának felkeltésére.

ABSTRACT

Experimental classes on anharmonic oscillation and resonance were taught in the ninth grade of grammar school, building on the topic of harmonic oscillation. Students were encouraged to actively participate in reading the numerically generated figures and verifying rules. When looking at anharmonic oscillation, they attempted to predict the changes arising from the inclusion of the non-linear component. Novel ways of presentation succeeded in waking the natural curiosity of students.

KULCSSZAVAK/KEYWORDS

anharmonikus rezgőmozgás, oktatás
anharmonic oscillations, teaching

BEVEZETÉS

A fizikaoktatásban a leegyszerűsített, idealizált esetektől indulunk el, és tartunk az összetett, a valóságot egyre pontosabban leíró rendszerek megismerése felé. A középiskolai oktatás során azonban általában nem jutunk el a hétköznapi tapasztalt valós jelenségek leírásáig. A rezgőmozgás oktatása során nem szólnak például a periódusidőnek a kitéréstől való függéséről.

A gimnázium kilencedik évfolyamán tartott kísérleti órák során törekvésem az volt, hogy az anharmonikus rezgés és rezonancia kapcsán megmutassam: a valós jelenségeket a lineáris rendszereknél pontosabban leíró nemlineáris rendszerek egyszerű esetei megismertethetők a középiskolásokkal. A jelenség bemutatása és magyarázata számítógépes szimulációs programok segítségével történt, a – középiskolai kívánalmakat meghaladó – matematikai levezetés mellőzésével.

FIZIKAI ALAPOK

Az alábbiak a szimulációs programokkal vizsgált jelenségek elméleti hátterét mutatják be. Illusztrációként felhasználom az órai magyarázat alapját képező, a program által készített ábrák egy részét.

NEMLINEÁRIS REZGÉS

Az anharmonikus rezgést az [1] egyenlet írja le

$$m\ddot{x} = -f_1x - f_2x^3 - k\dot{x}, \quad (1)$$

ahol x a rezgőmozgás pillanatnyi kitérése. A paraméterek az f_1 rugóállandó, az f_2 anharmonikus együttható, a k súrlódási együttható. A ω_0 sajátfrekvencia, ε anharmonikus együttható, α súrlódási együttható

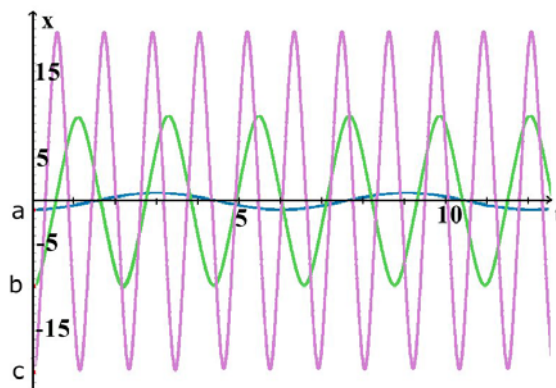
$$\frac{f_1}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{f_2}{m} = \varepsilon, \quad \frac{k}{m} = 2\alpha \quad (2)$$

bevezetésével

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (3)$$

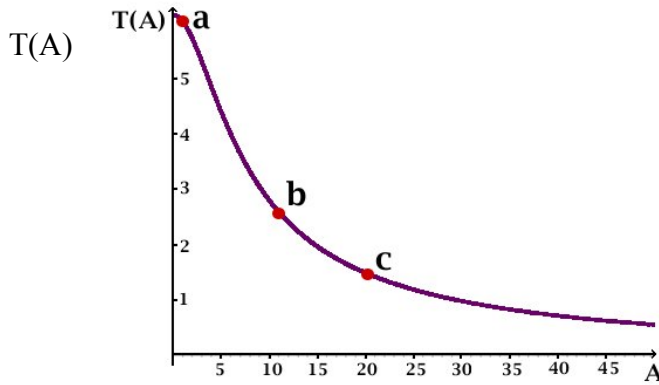
Ezt alkalmasan választott távolság és időegység bevezetésével mértékegység nélkülinek (dimenziótlannak) tekintjük. A modellezéshez használt programok Pascal nyelven íródtak. A program által végzett számítások alapja a negyedrendű Runge-Kutta módszer, melynek lépésenkénti pontossága h^{-5} nagyságrendű, ahol h a lépésköz. A programok futtatásakor a h értékét 0,001-re állítottam be, és megadtam az előbb tárgyalt paramétereken kívül a kezdőfeltételeket is: kezdeti kitérés (x_0) és kezdeti sebesség (v_0).

A numerikus számolás eredményét mutatja az 1. és 2. ábra.



1. ábra Szabad anharmonikus rezgőmozgás numerikusan meghatározott kitérés-idő grafikonja. $\omega=1$, $\alpha=0$, $\varepsilon=0,1$, a kezdőfeltétel: $x_{0a}=1$, $v_{0a}=0$, $x_{0b}=10$, $v_{0b}=0$, $x_{0c}=20$, $v_{0c}=0$.

Az 1. ábráról leolvasható, hogy a periódusidő rendre $T_a=6$, $T_b=2,18$, $T_c=1,15$ azaz jelentősen függ az A amplitúdótól, mely ezzel a kezdőfeltétellel éppen x_0 .



2. ábra Szabad anharmonikus rezgőmozgás periódusidő-amplitúdó grafikonja. $\omega=1$, $\alpha=0$, $\varepsilon=0,05$, $A_{\min}=0,1$, $dA=0,05$, $A_{\max}=50$, $v_0=0$

A 2. ábra mutatja, hogy az a kép, melyet a harmonikus rezgés sugall, vagyis hogy a rezgésidő nem függ az amplitúdótól, kivételes. Csakis a kis amplitúdójú határesetben ($A \rightarrow 0$) érvényes.

NEMLINEÁRIS KÉNYSZERREZGÉS REZONANCIÁJA

Az anharmonikus kényszerrezgést a

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = f_0 \cos(\Omega t) \quad (4)$$

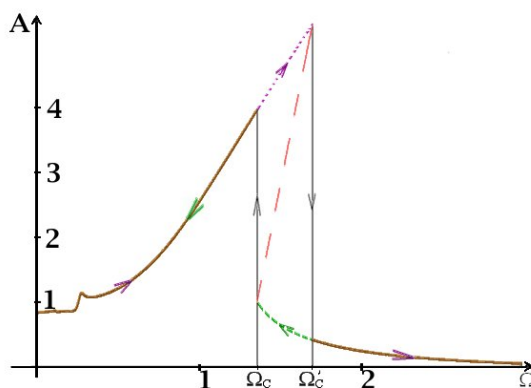
egyenlete [1] írja le, ahol Ω a gerjesztési frekvencia, f_0 a gerjesztés maximuma. E rendszer rezonancia-jelenségeinek különleges jellemzői közé tartozik például a rezonancia folyamatirány-függése, azaz hogy a gerjesztő erő körfrekvenciájának növelése, illetve csökkentése két, egy közbenső szakaszon (az Ω_c , Ω_c' , tartományban) eltérő rezonanciagörbét eredményez. Az Ω_c , Ω_c' értékeknél amplitúdóugrás következik be (3. ábra). Az ábra úgy készült, hogy numerikus szimulálásban végigmentünk a gerjesztő körfrekvenciákon 0,1-től 3-ig piciny 0,001-es lépésközzel és meghatároztuk a hozzá tartozó maximális kitérést (amplitúdót) elég sok periódus elteltével, amikor már állandósult a mozgás. Majd ugyan ezt tettük visszafelé 3-tól 0,1-ig.

A hétköznapiakban is megfigyelhető ez a hiszterézis jellegű jelenség. Például a régi típusú centrifugáknál beinduláskor hallható, ahogyan egyre gyorsabban forog a centrifuga dobja, és közben egyre magasabb hangon és egyre hangosabban szól, majd egyik pillanatról a másikra a hangerő lecsökken, és innentől halkul, míg a hang magassága tovább nő. Leálláskor pedig ahogyan a dob fordulatszámja csökken, úgy csökken a hallható hangmagasság is, de a hangerő egy ideig egyenletesen nő, mielőtt egy hirtelen felerősödés után csökkenni kezd. Hasonló jelenség figyelhető meg néha az autóknál, gyorsítás közben, gázadáskor és lassításánál, amikor visszavesszük a gázt.

A nemlinearitás (az ε paraméter) csökkenésekor az Ω_c , Ω_c' frekvenciák tartanak egymáshoz és $\varepsilon=0$ -ra visszakapjuk a jól ismert rezonancia görbét. Ez azért is figyelemre méltó, mert visszafelé a harmonikus rezgés rezonanciagörbéjének ismeretéből nem következtethetünk az anharmonikus rezgés rezonanciagörbéjének érdekességeire.

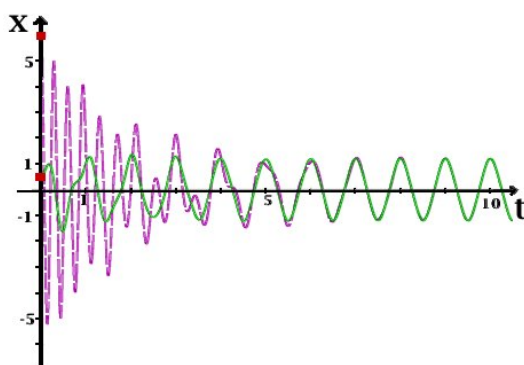
FIZIKAI HÁTTÉR

Disszipatív rendszerekben a mozgások a kezdőfeltételek széles osztályaiban egyetlen állandósult mozgáshoz tartanak. A mozgások szemléltetésére használjuk a fázisteret, melyben a disszipatív mozgások trajektóriái az állandósult mozgásoknak megfelelő határciklus-attraktorokhoz tartanak. A kis ($\Omega < \Omega_c$) és nagy ($\Omega > \Omega_c'$) gerjesztő frekvenciánál 4. és 5. ábra egyetlen attraktor létezik. A rezonanciagörbe említett köztes szakaszán (az $\Omega_c < \Omega < \Omega_c'$ tartományban) a határciklus megtöbbszöröződik: megjelenik két stabil és egy instabil határciklus (8. 9. és 10. ábra).



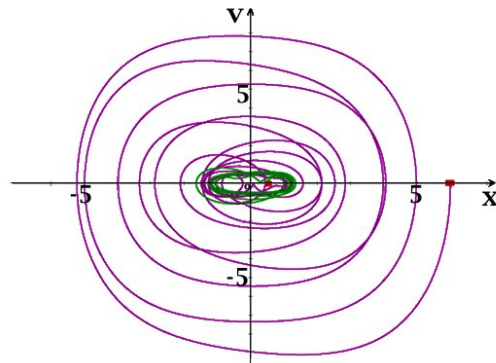
3. ábra Anharmonikus kényszerrezgés rezonanciagörbéje. $\Omega_0=0,1$, $d\Omega=0,001$, $\Omega_{\max.}=3$, $\alpha=0,05$, $f_0=1$, $\varepsilon=-0,1$, a kezdőfeltétel: $x_0=1$, $v_0=0$. $\Omega_c=1,429$ $\Omega_c'=1,749$.

Az $\Omega_c < \Omega < \Omega_c'$ tartományban két különböző rezgés állhat be, hosszú idő után, de ha a frekvenciát lassan növeljük, akkor csak nagy amplitúdójú, ha lassan csökkentjük, csak kis amplitúdójú valósul meg. Ez hasonló az elsőrendű fázisátalakulásokra jellemző hiszterézis jelenséghez [2]. Az Ω_c , Ω_c' tartományban lévő körfrekvenciák mindegyikéhez egy harmadik amplitúdó is tartozik. Ezek az amplitúdó értékek összekötik a két ugrási pontot, és ezáltal a látszólag szakadós görbe egy „hátrahajló” résszel folytonossá válik. Ez a rész jellemzi az instabil állapotokat. A két görbe végpontját összekötöttem egy vékony szaggatott piros vonallal, érzékeltetve a két vizsgált folyamat során soha el nem ért instabil egyensúlyi állapotot. Ez a jelenség közvetlen kapcsolatban van a mozgásegyenletben (anharmonikus esetben) megjelenő nemlineáris taggal. Ez a tag teszi értelmezhetővé a kísérletek és számítógépes modellezések során tapasztalt furcsa tulajdonságát.



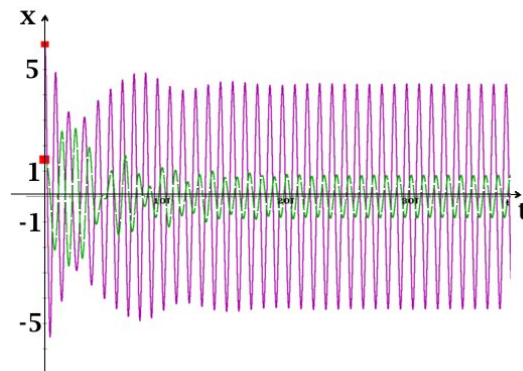
4. ábra Anharmonikus kényszerrezgés kitérés-idő grafikonja $\Omega < \Omega_c$ -re. $\omega_0=1$, $\alpha=0,05$, $f_0=1$, $\Omega=0,5$, $\varepsilon=0,1$; kezdőfeltételek: (folytonos) $x_{01}=0,5$, $v_{01}=0$, (szaggatott) $x_{02}=6$, $v_{02}=0$.

Bármilyen kezdőfeltétellel ugyanaz az állandósult rezgés alakul ki. Hasonló a helyzet $\Omega > \Omega_c'$ -re is.



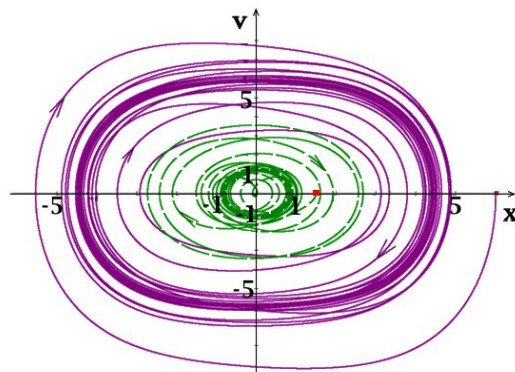
5. ábra A 4. ábrán bemutatott anharmonikus kényszerrezgés fázistérbeli képe. $\omega_0=1$, $\alpha=0,05$, $f_0=1$, $\Omega=0,5$, $\varepsilon=0,1$; kezdőfeltételek: (belső) $x_{01}=0,5$, $v_{01}=0$, (külső) $x_{02}=6$, $v_{02}=0$.

Az egyetlen határciklus attraktor a vastag (zöld) vonal alatt helyezkedik el (ebben a tartományban a lila és a zöld görbék egybeesnek, de mivel a zöldet rajzoljuk utoljára, az elfedi a lilát).



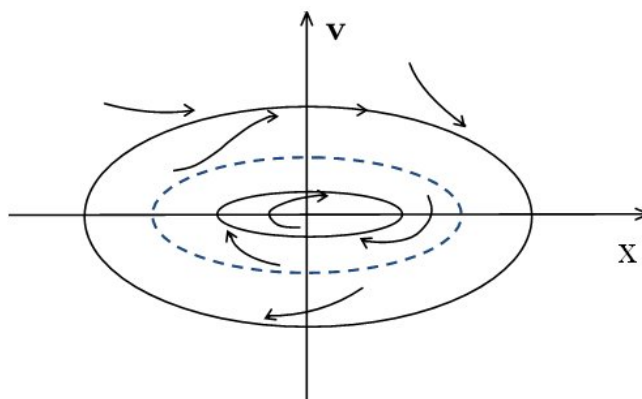
6. ábra Anharmonikus kényszerrezgés kitérés-idő függvénye az (Ω_c, Ω_c') intervallumból választott gerjesztési frekvencia esetén. $\omega_0=1$, $\alpha=0,05$, $f_0=1$, $\Omega=1,5$, $\varepsilon=0,1$; kezdőfeltételek: (szaggatott) $x_{01}=1,5$, $v_{01}=0$, (folytonos) $x_{02}=6$, $v_{02}=0$.

Különböző kezdeti feltételek most két különböző állandósult mozgáshoz tartanak: egy nagy és egy kicsi amplitúdójú rezgéshez.



7. ábra A 6. ábrán bemutatott anharmonikus rezgések fázistérben ábrázolva. $\omega_0=1$, $\alpha=0,05$, $f_0=1$, $\Omega=1,5$, $\varepsilon=0,1$; kezdőfeltételek: (szaggatott) $x_{01}=1,5$, $v_{01}=0$, (folytonos) $x_{02}=6$, $v_{02}=0$.

A két határciklus attraktor a vastag folytonos (lila) és a vastag szaggatott (zöld) tartomány alatt húzódik.



9. ábra Anharmonikus kényszerrezgések fázisterének sematikus ábrája

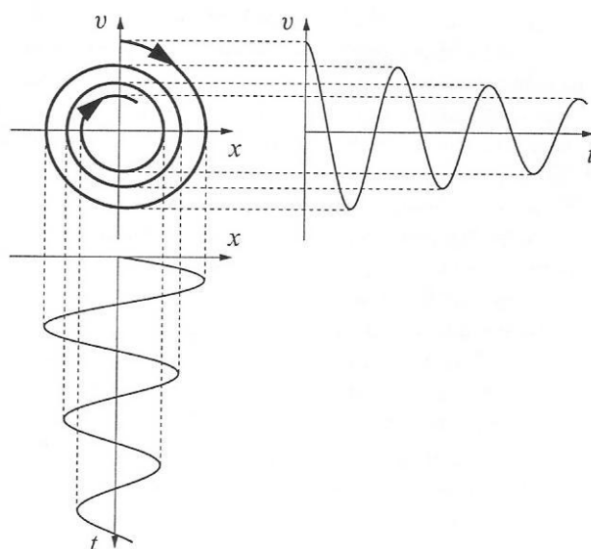
A sematikus ábra mutatja, hogy a két határciklus-attraktor között létezik egy instabil határciklus, mely kettéválasztja azokat a kezdőfeltételeket melyek az egyik vagy másik attraktorhoz tartanak.

OKTATÁS

A fizika oktatása során az oktatási rendtől függően a diákok a 9. évfolyam végén vagy a 11. évfolyam elején ismerkednek meg a harmonikus rezgés témakörének alapjaival. A matematikai alapok közül a trigonometriai függvények ismerete a 9. évfolyamban még nem, de a 11. évfolyamban már elvárható.

Oktatási kísérletemben igen hasznosnak bizonyult a Tellmann-Darvay-Kovács szerkesztette, a romániai magyar nyelvű oktatásban a 11. évfolyamon használt fizika tankönyv [3], mely szemléletesen, matematikai levezetések nélkül tárgyalja az anharmonikus mozgás és a káoszelmélet néhány elemét.

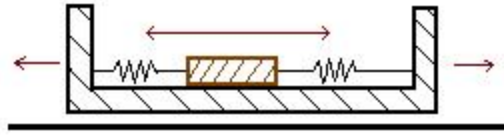
A fázistér bemutatásánál és magyarázatánál felhasználtam a kitérés-idő és sebesség-idő grafikonokkal való kapcsolatot. [4] (10. ábra)



10. ábra A fázistérbeli trajektória $v(x)$ származtatása a kitérés-idő $x(t)$ és sebesség-idő $v(t)$ grafikonokból ([4]-ből).

Annak érdekében, hogy belássuk a nem harmonikus rezgéssel leírható jelenségek létezését, a tanórán bemutattam egy ilyen példát: egy kb. 60 cm hosszú és 15 cm széles, vízszintes,

nyers, lecsiszolt felületű falpra két lécet erősítettem, és ezek közé két oldalán egy-egy (nem túl kemény) rugóval egy kb. 15 x 10 x 5cm-es, az alaplaphoz hasonló felületi minőségű fahasábot feszítettem ki, ami az alaplapon nyugodott. (11. ábra)



11. ábra Az órán bemutatott nemlineáris rezgést demonstráló berendezés sematikus ábrája

A méretezés lehetővé tette a jelentős kitérések vizsgálatát. Látványosan nagy kitéréseknél már észrevehető volt a fahasáb mozgásának eltérése a „szokásos rezgéstől”. A jelentős súrlódás miatt a tartós megfigyelést úgy tettem lehetővé, hogy finoman mozgattam (rezegtettem) az alaplapot, gerjesztett mozgást, kényszerrezgést hozva létre. A diákok számára ekkor az volt megfigyelhető, hogy a hasáb a szélső helyzetekben mintha beragadna, az egyensúlyi helyzeten viszont átszáguld. Ez a kísérlet a harmonikus rezgőmozgás oktatásánál használatos kiskocsis kísérlet módosított változata, így jó lehetőséget nyújtott az összehasonlításra. A diákokkal közösen azonosítottuk a különbséget okozó tényezőket: rugó erőssége, súrlódás mértéke, maximális kitérés. A kísérlet segítségével számítások nélkül is belátható volt, hogy a mozgás már nem írható le a korábbi szinusz függvényvel.

Ezt követően a projektor segítségével kivetítettem az erre a célra készült Pascal programok számításai alapján készült ábrákat és animációkat (fázistér grafikonokat, rezonancia görbéket stb.). Nagy vonalakban ismertettem a programok működési elvét, a Pascal nyelven való programozás vagy a Runge-Kutta módszer részletezése nélkül. A különböző kezdőfeltételek és paraméterek alkalmazásával párhuzamosan szemléltettem a lineáris és a nemlineáris jelenséget, a már tanultakból kiindulva. A diákok aktívan bekapcsolódhattak a harmonikus rezgések szabályszerűségeinek igazolásába, majd az anharmonikus rezgés megismerése során megpróbálhatták megjósolni, milyen változások következnek be a nemlineáris tag figyelembe vétele esetén.

A kísérleti órákat egy harminchárom fős, kilencedik évfolyamos, túlnyomórészt nem reál érdeklődésű tanulókból álló gimnazista osztályban tartottam. [5] A nagy létszámú osztály minden tagjának érdeklődését ugyan nem sikerült felkelteni, de a téma és a bemutatás újszerű módja aktivizált olyan tanulókat, akikre egyébként az addigi órákon a passzivitás volt jellemző. A szemléltetés szimulációra építő módja kevésbé megszokott ugyan, de egyrészt a mai diákok számára ismerős és elfogadott, másrészt jó alkalom arra, hogy a közvetlen megfigyeléssel párhuzamba állítva megalapozzuk a hitelességét, hiszen a modern fizikai oktatása során elsősorban erre a módszerre támaszkodhatunk.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönetemet szeretném nyilvánítani Tél Tamás tanár úrnak, aki felhívta a figyelmemet a témában rejlő érdekességre és munkám során folyamatosan támogatott.

IRODALOMJEGYZÉK

- 1 Nagy Károly: Elméleti mechanika. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1993.
- 2 Budó Ágoston: Kísérleti Fizika I. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2004.
- 3 Tellmann, Jenő – Darvay Béla – Kovács Zoltán: Fizika F1 – Tankönyv a XI. osztály számára. Kolozsvár, Ábel Kiadó, 2006.

- 4 Tél Tamás – Gruiz Márton: Kaotikus Dinamika - Bevezetés a kaotikus dinamika világába a klasszikus mechanika jelenségein keresztül. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
- 5 Kiss József: Nemlineáris rezgés bemutatása a középiskolai oktatásban diplomamunka, ELTE Bp. 2009.

SZERZŐK

Kiss József, középiskolai tanár, Than Károly Ökoiskola, codexjoe@index.hu