ELEKTROMOS ELLENÁLLÁS-HÁLÓZATOK

ELECTRICAL RESISTANCE NETWORKS

Rácz Lilla[1], Bérces György[2]
[1]Leövey Klára Gimnázium, Budapest
[2]Eötvös Loránd Tudományegyetem, TTK, Anyagfizikai Tanszék, Budapest

ÖSSZEFOGLALÁS

Az elektromos hálózatokkal kapcsolatos ismereteket általában a középiskolák tizedik osztályában tanulják a diákok. Ellenállások soros és párhuzamos kapcsolásánál kiszámítják az eredő ellenállást, megtanulják az Ohm- és a Kirchhoff-törvényeket, azok alkalmazását. A legtöbb gimnáziumban ezzel ki is merítik az elektromos-hálózatok témakörét. A gyakorlati és elméleti alkalmazások, a témakörhöz kapcsolódó különböző érdekes feladatok, kísérletek általában kimaradnak a tananyagból. E cikkben olyan, elsősorban matematikai problémákat gyűjtöttünk össze, melyek megoldásánál a fizika, azon belül is az ellenállás-hálózatok segítettek.

ABSTRACT

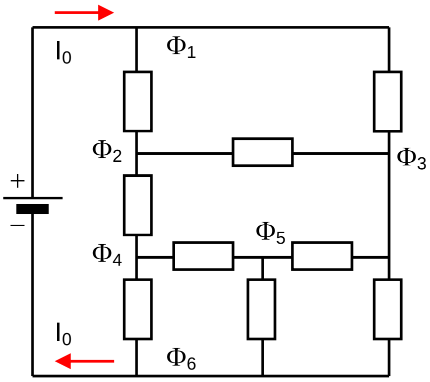
Electric circuits are usually taught in the 10th grade of the secondary school. The students get to know how to calculate the equivalent resistance of a number of resistors connected in series and in parallel, they study Ohm's and Kirchhoff's laws and their applications. In most secondary schools the teaching of electrical circuits ends here. Practical and theoretical applications, interesting exercises, experiments usually get left out of the syllabus. In this paper we present such mathematical problems that can be solved by the help of physics, namely resistance networks.

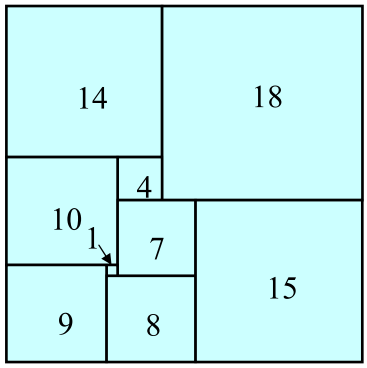
KULCSSZAVAK/KEYWORDS
tökéletes négyzet, Fibonacci-számok, véletlen bolyongás
perfect square, Fibonacci-numbers, random walk

LEFEDÉSI PROBLÉMÁK

Téglalap (négyzet), négyzetekkel történő lefedésének problémájával (négyzet négyzetesítése, angolul squaring square) a 20. század elején kezdtek foglalkozni a matematikusok. Az első utalások H. E. Dudeney puzzle játékostól [1], a lefedésre vonatkozó első matematikai eredmények *M.* Dehn-től származnak [2]. Tökéletesnek nevezzük egy téglalap, vagy négyzet négyzetekkel történő olyan (hézagmentes, átfedés nélküli) lefedését, amely nem tartalmaz két egybevágó négyzetet. Az elektromos hálózatok és a lefedési problémák közötti analógia felfedezése az 1940-es évekre tehető.

Alkalmazzuk az 1. ábrán látható, azonos *R* értékű ellenállásokból álló áramkörre a csomóponti potenciálok módszerét:





1.ábra: 9 egyforma ellenállásból álló hálózat és a 9 különböző négyzettel lefedett téglalap [3]

$$\frac{\Phi_2-\Phi_1}{R}+\frac{\Phi_3-\Phi_1}{R}+\mathrm{I}_0=0, \tag{1}$$

$$\frac{\Phi_1-\Phi_2}{R}+\frac{\Phi_4-\Phi_2}{R}+\frac{\Phi_3-\Phi_2}{R}=0\,, \tag{2}$$

$$\frac{\Phi_1-\Phi_3}{R}+\frac{\Phi_2-\Phi_3}{R}+\frac{\Phi_5-\Phi_3}{R}+\frac{\Phi_6-\Phi_3}{R}=0\,, \tag{3}$$

$$\frac{\Phi_2-\Phi_4}{R}+\frac{\Phi_5-\Phi_4}{R}+\frac{\Phi_6-\Phi_4}{R}=0\,, \tag{4}$$

$$\frac{\Phi_3-\Phi_5}{R}+\frac{\Phi_6-\Phi_5}{R}+\frac{\Phi_4-\Phi_5}{R}=0\,, \tag{5}$$

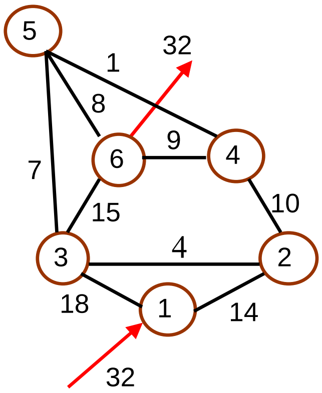
$$\frac{\Phi_3-\Phi_6}{R}+\frac{\Phi_4-\Phi_6}{R}+\frac{\Phi_5-\Phi_6}{R}-I_0=0\,. \tag{6}$$

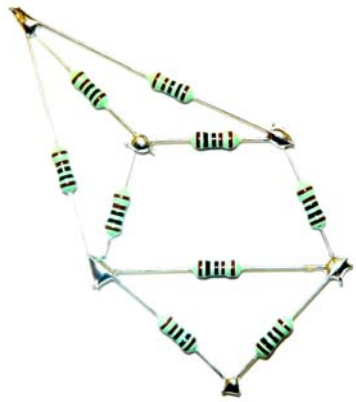
Legyen mindegyik ellenállás értéke $R=1\Omega$. Válasszuk a Φ_6 potenciál értékét nullának. A fenti egyenletrendszer megoldása $I_0=32$A esetén:$\Phi_1=33$, $\Phi_2=19$, $\Phi_3=15$, $\Phi_4=9$, $\Phi_5=8$, $\Phi_6=0$.

Rajzoljuk le újra az áramkört olymódon, hogy az ágakat olyan téglalapokkal ábrázoljuk, amelyek szélessége az ágban folyó áram erősségével, magassága az ág feszültségesésével arányos. Ezzel az eljárással a fenti elektromos-hálózathoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy téglalapot, amelyet négyzetekkel fedtünk le. Ez látható az 1. ábrán.

Az előbb felrajzolt áramkörnek megfeleltethető egy gráf is, melynek csomópontjait úgy számoztuk meg, hogy azoknak a csomóponttal azonos indexű potenciál feleljen meg (2.ábra). Nyilakkal jeleztük azt, hogy hol vezettük be az áramot, és hol vezettük ki.

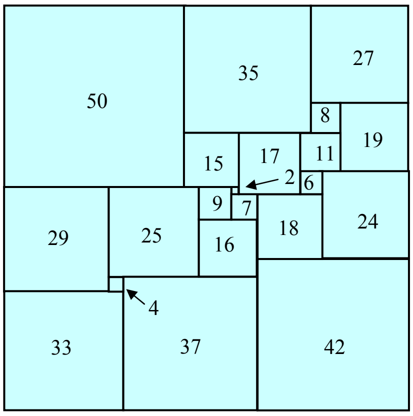
A gráfnak megfelelő hálózatot *1kΩ*-os ellenállásokból megépítettük (2.ábra). A 6-os és az 1-es csomópontok közé *33V* feszültséget kapcsoltunk. Megmérve az egyes ellenállásokon eső feszültségeséseket, a számolt értékekkel pontos egyezést kapunk.

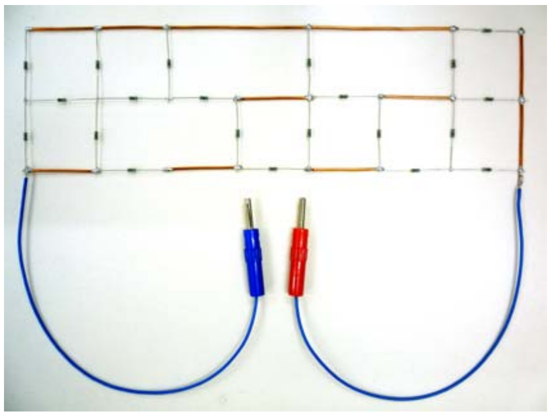




2. ábra: A 9 ellenállásból álló elektromos hálózat gráf formájában, és az 1kΩ-os ellenállásokból megépített változata

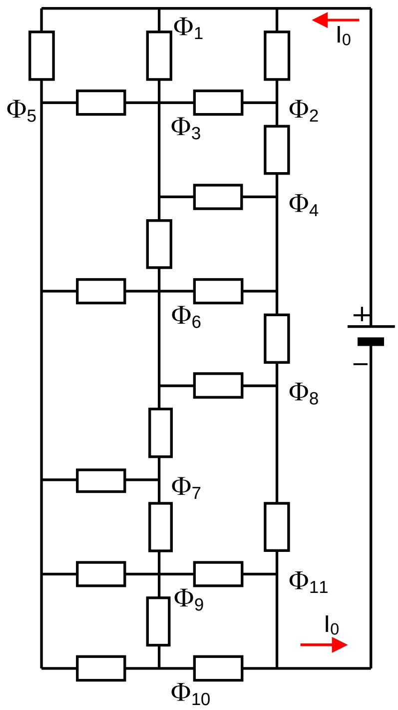
Számítógépes kereséssel igazolták, hogy húsznál kevesebb négyzetet igénylő tökéletes négyzetlefedés nem létezik. A. J. Duijvestijn (számítógép segítségével) 1978-ban megtalálta a legkisebb elemszámú (rendű), 21 különböző négyzetből álló négyzetlefedést [4]-[5].





3. ábra: 21 négyzetből álló tökéletes négyzetlefedés és az ellenállás-hálózatként megépített változata

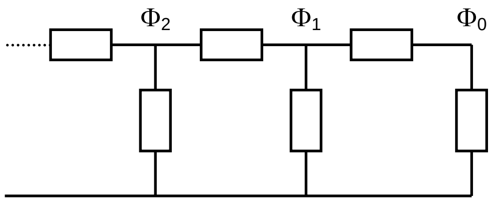
A negyvenes években bebizonyították, hogy nincs olyan téglalap, mely kilencnél kevesebb különböző négyzettel lefedhető. A korábbi, 1.ábra ellenállás-hálózatához tartozó téglalaplefedés pontosan kilenc négyzetből áll. Ezt elsőként Z. Moron (1925) lengyel matematikus találta meg [3]. A legkisebb rendű (Duijvestijn-féle) tökéletes négyzetet (3. ábra) átrajzoltuk a fent megismert eljárással elektromos hálózattá. Az ellenállásokat azonosnak véve, a 4. ábrán látható hálózat rajzolható fel. Nagy pontosságú (*0,1%*-os) *1*Ω-os, ellenállásokból elkészítettük a megfelelő hálózatot (3. ábra), amelyen számszerűen is “kimérhetők” a lefedésben szereplő négyzetek oldalhosszai [6].



4. ábra: A legkisebb rendű tökéletes négyzethez tartozó ellenállás-hálózat

LÉTRAÁRAMKÖRÖK ÉS A FIBONACCI-SZÁMOK KAPCSOLATA

Végtelen ellenállásláncok (létraáramkörök) eredő ellenállásának kiszámítása középiskolai tananyagban is szerepelhet. Az ehhez kapcsolható matematika a tizenkettedikes tananyagban található meg: sorozatok határértéke címen. A határérték a középiskolások számára nehéz fogalom. Segítséget jelenthet a fogalom megértésében, ha olyan példákat mutatunk, amelyben a határérték jelentése közvetlenül látható. Ebben is segíthetnek például a létraáramkörök.



5. ábra: Végtelen ellenállásláncc

A fenti végtelen ellenállásláncc eredőjét szeretnénk kiszámítani (5. ábra). Mindegyik ellenállás azonos, R értékű. Jobbról indulva, „láncszemenként" haladva számolunk. Az első láncszem eredője $R_1 = 2R$. Két és három láncszemnél a következő értékeket kapjuk:

$$R_2 = \frac{R_1 R}{R_1 + R} + R = \frac{2R^2}{3R} + R = \frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R, \tag{7}$$

$$R_3 = \frac{R_2 R}{R_2 + R} + R = \frac{(5/3)R \cdot R}{(5/3)R + R} + R = \frac{5}{8}R + R = \frac{13}{8}R. \tag{8}$$

Sejtésünk az (teljes indukcióval igazolható), hogy az eredő ellenállás mindig két, egymást követő Fibonacci-szám (*$F_0=0$, $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$,...$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$, $i=2,3,...$*) hányadosával arányos [6]:

$$R_N = \frac{F_{2N+1}}{F_{2N}} R. \tag{9}$$

N nagy értékeinél $R_N \approx x$. Használjuk ki azt, hogy a végtelen ellenálláslánc eredő ellenállása nem változik, ha újabb láncszemet kapcsolunk a hálózathoz. Így felírhatjuk, hogy:

$$x = \frac{xR}{x+R} + R. \tag{10}$$

Az egyenlet pozitív megoldása adja a lánc ellenállását

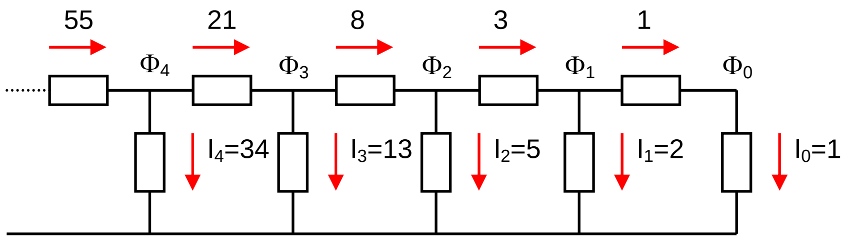
$$x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) R. \tag{11}$$

A Fibonacci-számok explicit alakjának ismeretében (9)-ből R_N határértékére ugyanezt az értéket kapjuk.

Az egyes csomópontok potenciáljára és az ágakban folyó áramerősségekre a következő összefüggések adódnak:

$$\Phi_N = F_{2N+1} \Phi_0, \tag{12}$$

$$I_n = F_{2n+1} \frac{\Phi_0}{R} = F_{2n+1} I_0. \tag{13}$$



6. ábra: Árameloszlás a létraáramkörön.

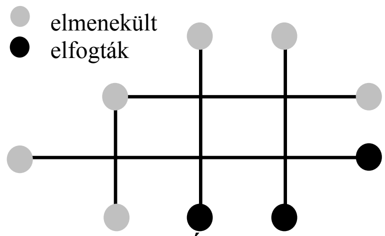
A hálózat első öt láncszemét *1 k*Ω-os ellenállásokból megépítettük. A lánc végére, az ötödik csomópontra *8,9V* feszültséget kapcsoltunk. Megmérve az egyes ellenállásokon eső feszültségeket a 6. ábrán látható értékekkel teljes egyezést kapunk. (A drótok és forrasztások ellenállásából származó veszteség elhanyagolható.)

BOLYONGÁS RÁCSON

Vizsgáljuk meg a következő kétdimenziós bolyongási problémát [7]. A 7. ábrán egy úthálózatot látunk, amelynek valamely belső pontjából (útkereszteződésből) elindul egy bankrabló, aki a rendőrök elől menekül. A kereszteződésekben véletlenszerűen, ¼ valószínűséggel történik az irányválasztás.

A rendőrségnek még nem sikerült lezárnia az egész várost, így egyes irányokba haladva a bankrabló elmenekülhet. A kérdés az, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy a bankrabló egy belső pontból indulva meg tud menekülni, mielőtt a rendőrök karjaiba szaladna. A határpontokból indulva a megmenekülés valószínűsége 1 és 0 aszerint, hogy

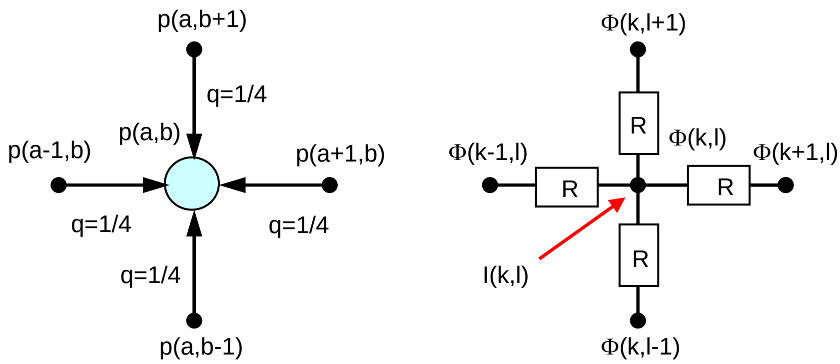
szürke, illetve fekete pontból indul a bankrabló.



7. ábra: Úthálózat

Jelölje *p(a,b)* annak a valószínűségét, hogy a bankrabló egy *(a,b)* koordinátákkal megadható belső pontból indulva megmenekül. Az *(a,b)* pontba a bankrabló valamelyik szomszédos pontból jutott, azaz *(a-1,b), (a+1,b), (a,b+1), (a,b-1)* pontok valamelyikéből ¼ valószínűséggel:

$$p(a,b)=\frac{p(a+1,b)+p(a-1,b)+p(a,b+1)+p(a,b-1)}{4}\;. \tag{14}$$



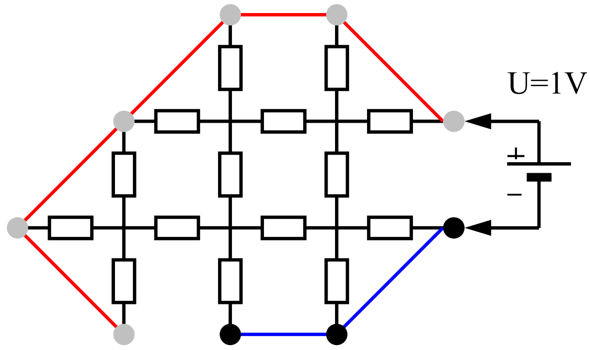
8. ábra: Valószínűségi- és potenciál-eloszlás egy belső pontban

Tekintsünk egy négyzetrács-hálózatot, ahol az élek azonos *R* ellenállásokból állnak (8.ábra). A *(k,l)* koordinátájú pontba kívülről befolyó áram *I(k,l),* a *(k,l)*-edik csomópont potenciálja *Φ(k,l).* A csomóponti törvény alapján:

$$I(k,l)+\frac{\Phi(k+1,l)-\Phi(k,l)}{R}+\frac{\Phi(k-1,l)-\Phi(k,l)}{R}+\frac{\Phi(k,l+1)-\Phi(k,l)}{R}+\frac{\Phi(k,l-1)-\Phi(k,l)}{R}=0\,. \tag{15}$$

Ha a belső pontokba kívülről nem folyik be áram, akkor a *Φ(k,l)* és a *p(a,b)* függvények hasonló hozzárendelési szabállyal adhatók meg. Harmonikus függvények, melyekre jellemző, hogy a határokon azonos értéket vesznek fel. Emiatt a függvények minden pontban az értelmezési tartományon belül azonos értéket vesznek fel [7]. Következmény: a *p* és *Φ* függvények azonosak.

A bolyongási probléma megoldását megkaphatjuk, ha az úthálózatnak megfelelő gráfot elektromos hálózatként megépítjük (9. ábra). A szürkével és feketével jelzett pontokat elhanyagolható ellenállású vezetékekkel (vörösrézhuzal) kötjük össze. A szürke pontokra *1V*-ot kapcsolunk, míg a feketével jelzett határpontok 0 potenciálon vannak. Ez megfelel annak, hogy ha a bankrabló a szürkével jelzett határpontokban áll, akkor a megmenekülésének valószínűsége *p*=1, ha a fekete pontokon áll, akkor a rendőrök elfogták, így a menekülés esélye *p*=0.



9. ábra: Bolyongási probléma ellenállás-hálózati megfelelője.

Megépítve a hálózatot, megmérhetjük az egyes rácspontok potenciál értékeit. Ezek a feszültségértékek közvetlenül megadják a *p(a,b)* valószínűség-eloszlás értékeit.

IRODALOM

1. http://www.squaring.net/history_theory/ernest_dudeney.html
2. M. Dehn: "Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke" *Journal Mathematische Annalen,* Publisher Springer, Volume 57, September 1903.
3. Z. Moroń: "O rozkładach prostokatów na kwadraty." *Przeglad matematyczno-fizyczny* 3, 152-153, 1925.
4. A. J. W. Duijvestijn: "Simple perfect square of lowest order", J Comb. Theory Ser. B 25. 240-243. 1978.
5. http://mathworld.wolfram.com/PerfectSquareDissection.html
6. Rácz Lilla: Ellenállás-hálózatok (Szakdolgozat), ELTE, TTK, Budapest, 2009.
7. P. G. Doyle, J. L. Snell: Random walks and electric networks, 12-55. 2006.

SZERZŐK

Rácz Lilla, matematika-fizika szakos tanár, Leövey Klára Gimnázium, Budapest, e-mail: fet676@gmail.com
Bérces György, egyetemi adjunktus, ELTE, TTK, Anyagfizikai Tanszék, Budapest, e-mail: berczes@metel.elte.hu